This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABV8267
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B59588
035/2: : |a (CaOTULAS)160217704
040: : |a ICJ |c MiU |d MiU
100:1 : |a Sicard, H.
245:00: |a Traité de cinématique théorique ... |c Avec des notes par A. Labrousse.
260: : |a Paris: |b Gauthier-Villars, |c 1902.
300/1: : |a viii p., 1 L., 185 p., 1 L. |b illus. (diagrs.) |c 25 cm.
650/1: 0: |a Kinematics
700/1:1 : |a Labrousse, A. |e ed.
998: : |c DPJ |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

Hosted by Google

Hosted by Google

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE THÉORIQUE

Hosted by Google

Hosted by Google

Alexander Ziwet

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE THÉORIQUE

PAR

H. SICARD,

Ancien professeur de mathématiques au Lycée de Périgueux,
Chevalier de la Légion d'honneur.

AVEC DES NOTES

PAR

A. LABROUSSE,

Ancien Elève de l'Ecole normale supérieure,
Professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

Hosted by Google

Hosted by Google

Ce livre, complété par les Notes d'un ami, contient tout ce qu'il y a d'essentiel en Cinématique.

Je le dédie à la mémoire de mon fils,

LÉON SICARD,

Etudiant en médecine,

Interne des Hôpitaux de Paris.

Chabrier, près Périgueux, le 5 avril 1901.

H. S.

Hosted by Google

Hosted by Google

INTRODUCTION

Ampère a donné le nom de *Cinématique* à la *Géométrie du mouvement*, considérée dans ses rapports avec le *temps*.

On évalue le *temps* en adoptant comme égaux les intervalles qui correspondent à l'accomplissement de phénomènes identiques. De cette définition on passe à la mesure du temps de la même manière dont on passe, par un exemple connu, de la définition des longueurs égales à la mesure de la longueur en général.

L'*instant* n'a pas de durée.

Le *mouvement* est un phénomène d'ordre relatif.

Soit S_1 un ensemble de points liés entre eux de manière à former un *système géométrique invariable*, c'est-à-dire toujours superposable à lui-même. Un point ou *mobile* est en *mouvement* ou en *repos* dans ce système suivant que ses distances aux points du système varient avec le temps ou restent les mêmes. Mais le système S_1, emportant avec lui le mobile, peut se mouvoir, en bloc, dans un système plus vaste S_2, celui-ci dans un autre, ...Il est clair que par rapport au dernier système considéré, ou *système fixe*, le mouvement du *mobile* dépend des mouvements intermédiaires.

Hosted by Google

L'essai d'Ampère sur la philosophie des sciences parut en 1834. Quatre ans après, la Cinématique était professée à la Sorbonne par le général Poncelet; mais ce n'est qu'à dater de 1862, époque de la publication du Traité spécial de Résal que la Cinématique se trouva, suivant la remarque de M. Appell (1) « définitivement constituée à l'état de science distincte. »

---

(1) Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, p. 43.

Hosted by Google

PREMIÈRE PARTIE

CINÉMATIQUE

Hosted by Google

Hosted by Google

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE THÉORIQUE

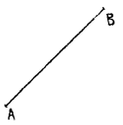
NOTIONS PRÉLIMINAIRES

SUR

LES VECTEURS

---

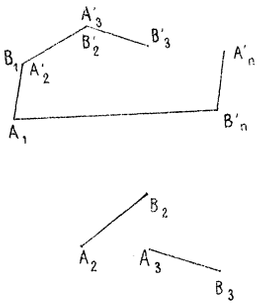
1. **Vecteur.** — On appelle vecteur un segment de droite pourvu d'un sens. Si, par exemple, le sens adopté est le sens de A vers B, A est dit *origine*, B *extrémité* du vecteur et celui-ci s'énonce vecteur AB. Le vecteur BA est, d'après cela, de sens contraire à AB.



2. **Mesure algébrique d'un vecteur.** — Sur la droite qui porte le vecteur, choisissons arbitrairement un sens positif. Au vecteur correspond alors un nombre algébrique ayant pour valeur absolue la longueur du vecteur, pour signe le signe + si le vecteur a le sens positif, le signe — dans le cas contraire. Nous appellerons ce nombre *mesure algébrique* du vecteur. Dans ce qui suivra, nous entendrons par *axe* une droite sur laquelle on a pris un sens positif.

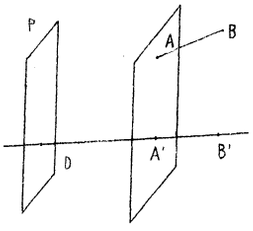
Hosted by Google

3. **Somme géométrique de plusieurs vecteurs.** — Soit n vecteurs $A_1 B_1$, $A_2 B_2$,... $A_n B_n$; on appelle somme géométrique de ces vecteurs pris dans l'ordre indiqué par les indices, le vecteur obtenu comme il suit : à la suite de $A_1 B_1$ on transporte $A_2 B_2$ sans changer sa direction et son sens ; $A_2 B_2$ vient alors en $A'_2 B'_2$; de même on transporte $A_3 B_3$ en $A'_3 B'_3$ à la suite de $A'_2 B'_2$, etc... ; après ces opérations, le dernier vecteur est en $A'_n B'_n$. Le vecteur $A_1 B'_n$ est par définition *la somme géométrique* ou encore la *résultante* des vecteurs considérés. Elle reste évidemment invariable en grandeur, direction et sens, si on déplace les vecteurs parallèlement à eux-mêmes.



PROJECTIONS

4. **Projection d'un vecteur sur une droite.** — Rappelons qu'on appelle projection d'un point A sur une droite D, faite parallèlement à un plan P, le point A′ où D est coupé par le plan mené par A parallèlement à P. La projection est dite *orthogonale* si P est perpendiculaire à D. On appelle projection du vecteur A B sur la droite D le vecteur A′B′ ayant pour origine et extrémité respectivement les projections de l'origine et de l'extrémité du premier vecteur.



5. **Théorème des projections.** — Nous nous bornerons à énoncer le théorème suivant presque évident :

Théorème I. — *La projection sur une droite de la résultante*

Hosted by Google

de plusieurs vecteurs est la résultante des projections des vecteurs sur la même droite.

Dans les applications de ce théorème, on prend sur la droite un sens positif et on se sert des deux théorèmes suivants démontrés dans les traités de trigonométrie.

THÉORÈME II. — *Si* a,b,c... l. *sont des points sur un axe et si on désigne par* $\overline{ab}$ *la mesure algébrique du vecteur* ab *on a*

$$\overline{al} = \overline{ab} + \overline{bc} + \ldots + \overline{kl}$$

c'est-à-dire que la mesure de la résultante de plusieurs vecteurs portés sur un même axe est la somme des mesures algébriques de ces vecteurs.

THÉORÈME III. — *La mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe s'obtient en multipliant la mesure algébrique du vecteur par le cosinus de l'angle que fait la direction positive de l'axe de projection, avec celle de l'axe qui porte le vecteur.*

6. **Détermination analytique de la résultante.** — Soit n vecteurs $V_1, V_2 \ldots V_n$. Désignons par X_i, Y_i, Z_i les mesures algébriques des projections du vecteur V_i sur trois axes de coordonnées et par X, Y, Z les projections de la résultante V de tous ces vecteurs. En appliquant aux trois axes les théorèmes I, et II, on a

$$\begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \\ Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \end{cases}$$

Les seconds nombres ne changent pas, quand on change l'ordre des parties. Par suite :

La somme géométrique de plusieurs vecteurs est indépendante de l'ordre des vecteurs composants.

7. **Longueur de la résultante.** — Les axes étant supposés rectangulaires, désignons par $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i$ les cosinus directeurs du vecteur V_i, par $\alpha\ \beta\ \gamma$ ceux de la résultante V ; soit, en

Hosted by Google

outre l_i la longueur du vecteur V_i, l celle de la résultante. On aura, en appliquant les théorèmes, I, II, III.

$$\begin{cases} l\alpha = \Sigma\, l_i \alpha_i \\ l\beta = \Sigma\, l_i \beta_i \\ l\gamma = \Sigma\, l_i \gamma_i \end{cases}$$

D'où, en élevant un carré et ajoutant membre à membre,

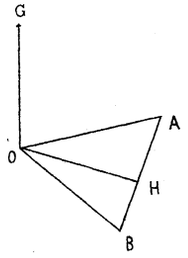
$$l^2 = \Sigma\, l_i^2 + 2\, \Sigma\, l_i l_j\, (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j)$$
$$l^2 = \Sigma\, l_i^2 + 2\, \Sigma\, l_i l_j\ \cos.\ (V_i V_j)$$

Cette formule fait connaître la longueur de la résultante en fonction des longueurs des vecteurs composants et des angles de ces vecteurs deux à deux.

MOMENTS

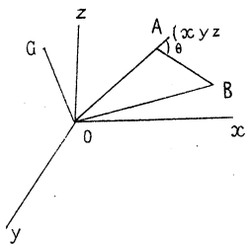
8. **Sens direct.** — On dit qu'un mobile se déplace dans le sens direct pour un observateur, si celui-ci le voit se mouvoir *de la gauche vers la droite.* Le sens d'un mobile est direct par rapport à un vecteur AB, s'il est direct pour un observateur ayant les pieds en A et la tête en B. On a une définition analogue quand on remplace le vecteur par un axe ; l'observateur est dirigé sur l'axe de telle sorte que le sens des pieds vers la tête soit le sens positif de l'axe.

9. **Moment d'un vecteur par rapport à un point.** — Le moment d'un vecteur AB par rapport à un point O, est un deuxième vecteur OG, ayant pour origine le point O, dont la longueur a même mesure que le double de l'aire du triangle AOB; ce vecteur est en outre perpendiculaire au plan OAB et a un sens tel que le sens de A vers B soit direct par rapport à OG. Observons que le moment ne varie pas si AB se déplace sur la droite qui le porte, qu'il devient nul si le vecteur AB est nul ou passe par O et dans ces deux cas seulement.



Hosted by Google

10. **Détermination analytique du moment d'un vecteur.** — Soit un trièdre de coordonnées, trirectangle et direct $Oxyz$. Cherchons les projections L,M,N sur les axes du moment d'un vecteur AB par rapport à l'origine. Nous définissons le vecteur par les coordonnées x,y,z de son origine, et ses projections X,Y,Z sur les axes.



En exprimant que OG est perpendiculaire à OA et AB, on a les deux relations.

$$\begin{cases} Lx + My + Nz = 0 \\ LX + MY + NZ = 0 \end{cases}$$

d'où on tire :

$$\frac{L}{yZ - zY} = \frac{M}{zX - xZ} = \frac{N}{xY - yX} = \pm \frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{\sqrt{\Sigma\,(yZ - zY)^2}}$$

Si on désigne par S l'aire du triangle OAB on a

$$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = OG = 2S$$

D'après l'identité de Lagrange

$$\begin{aligned} \Sigma\,(yZ - zY)^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xX + yY + zZ)^2 \\ &= \overline{OA}^2.\overline{AB}^2 - \overline{OA}^2.\overline{OB}^2 \cos^2\theta = \overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\sin^2\theta = 4S^2 \end{aligned}$$

θ désignant l'angle de OA avec AB.

Les trois rapports précédents ont donc pour valeur commune ± 1. Pour déterminer le signe à prendre, déplaçons la figure invariable OABG de manière que OA vienne sur Ox, le point B dans le plan des xy du côté de oy par rapport à $x'x$, OG viendra alors sur Oz. Le rapport $\frac{N}{xY - yX}$ ne pouvant varier que d'une manière continue et ayant une valeur absolue constante restera constant; pour la position particulière que nous avons indiqué il se réduit

Hosted by Google

à $\frac{N}{xY}$, N, x, Y, étant tous positifs. La valeur des trois rapports est donc $+1$ et l'on a

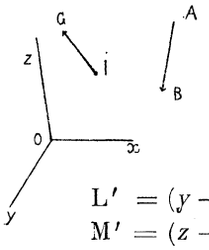
$$(1) \qquad \begin{cases} L = yZ - zY \\ M = zX - xZ \\ N = xY - yX \end{cases}$$

Les six quantités XYZ LMN ont reçu le nom de *coordonnées* du vecteur AB ; elles sont liées par la relation

$$(2) \qquad LX + MY + NZ = 0$$

Si on multiplie par un nombre algébrique m le vecteur AB, ses coordonnées sont visiblement multipliées par m. Comme X,Y,Z, L,M,N ne varient pas quand on fait glisser AB sur la droite qui le porte, on voit que cette droite est représentée par deux quelconques des équations (1) où xyz sont les coordonnées courantes. Inversement à six quantités X,Y,Z,L,M,N liées par la relation (2) correspondent une infinité de vecteurs égaux portés par une même droite ; en effet, les trois équations (1) en x,y,z sont alors compatibles et représentent trois plans passant par une même droite Δ. Soit A (x,y,z) un point quelconque de Δ, le point B de coordonnées $x+X$, $y+Y$, $z+Z$ est aussi sur Δ et le vecteur AB a pour coordonnées X,Y,Z,L,M,N.

11. Supposons maintenant qu'on prenne le moment du vecteur AB part rapport à un point quelconque I $(x_0 y_0 z_0)$. Si on transporte l'origine des axes en I les coordonnées de A deviennent $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; X,Y,Z ne changent pas; le moment par rapport à I a donc pour projections :



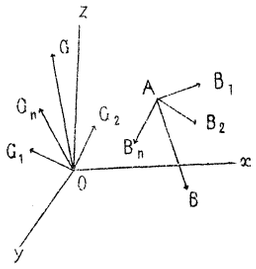
$$L' = (y - y_0)\,Z - (z - z_0)\,Y = L + z_0 Y - y_0 Z$$
$$M' = (z - z_0)\,X - (x - x_0)\,Z = M + x_0 Z - z_0 X$$
$$N' = (x - x_0)\,Y - (y - y_0)\,X = N + y_0 X - x_0 Y$$

(L,M,N,X,Y,Z) étant les coordonnées de AB

12. **Théorème de Varignon généralisé.** — *Le moment par rapport à un point de la résultante de plusieurs*

Hosted by Google

vecteurs concourants est la résultante des moments des vecteurs composants par rapport à ce point.



Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le point par rapport auquel on prend les moments ; soit x, y, z les coordonnées du point de concours, $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$ les coordonnées du vecteur AB_i, et L,M,N les projections du moment de la résultante. On a

$$\begin{aligned} L &= y\,\Sigma\,Z_i - z\,\Sigma\,Y_i = \Sigma\,(yZ_i - zY_i) = \Sigma\,L_i \\ M &= z\,\Sigma\,X_i - x\,\Sigma\,Z_i = \ldots\ldots \qquad = \Sigma\,M_i \\ N &= x\,\Sigma\,Y_i - y\,\Sigma\,X_i = \ldots\ldots \qquad = \Sigma\,N_i \end{aligned}$$

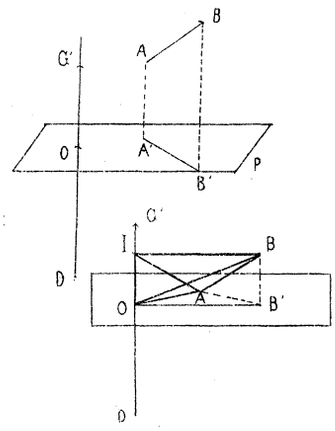
Ces égalités montrent que OG, moment de la résultante, est la somme géométrique des moments OG_i des composantes.

Si tous les vecteurs sont dans le plan xy, les égalités précédentes se réduisent à

$$N = \Sigma\,N_i$$

qui exprime le théorème de Varignon proprement dit.

13. **Moment par rapport à une droite.** — Soit une droite D et un vecteur AB ; A′B′ la projection orthogonale de AB sur un plan P perpendiculaire à la droite en un point O. Le moment de A′B′, par rapport au point O, est un vecteur OG′ situé sur D. Ce vecteur, évidemment indépendant de la position du point O, est le moment du vecteur AB par rapport à la droite D. Il est nul quand AB est nul ou parallèle à D. Observons en outre que par rapport à OG′, AB a le sens direct.



La mesure de OG′ est susceptible d'une interprétation

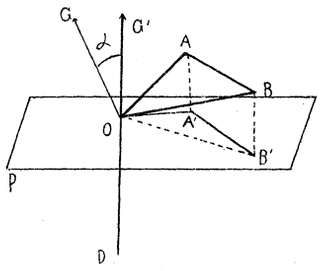
géométrique simple. Faisons passer le plan P par le point A.

Si nous prenons sur D le vecteur OI de longueur 1, le tétraèdre IOAB′ a pour volume $\frac{1}{3}$ de OAB′ et, par suite, $\frac{1}{6}$ de OG′. Mais les deux tétraèdres B′IOA, BIOA ont même base IOA et leurs sommets B′ et B sur une parallèle à cette base; d'ailleurs, si on fait glisser OI sur D, le volume ABOI ne change pas. On voit donc que : *La mesure du moment du vecteur AB, par rapport à une droite, est six fois le volume du tétraèdre déterminé par le vecteur AB et un vecteur de longueur égale à l'unité porté par la droite.*

Le théorème suivant nous sera souvent utile :

14. Théorème. — *Le moment d'un vecteur, par rapport à une droite, est la projection sur cette droite du moment du vecteur par rapport à un point quelconque de la droite.*

Soit OG le moment de AB par rapport au point O ; OG′ son moment par rapport à la droite D; si on désigne par S et S′ les aires des triangles OAB et OA′B′, on a OG′ = 2S′, OG = 2S et si α est l'angle de OG avec OG′



$$S' \cos \alpha = S$$

d'où $\quad OG' = OG \cos \alpha$

En outre, AB ayant le sens direct par rapport à OG et OG′ ces deux vecteurs sont d'un même côté du plan OAB.

Il suit de là que le point G′ est la projection de G sur D et le théorème est établi.

Ce théorème, combiné avec celui de Varignon, donne le suivant :

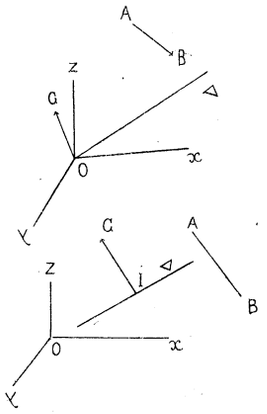
Le moment par rapport à une droite de la résultante de plusieurs vecteurs concourants est la résultante des moments des vecteurs composants par rapport à la même droite.

15. **Moment par rapport à un axe.** — Si de la droite D nous faisons un axe Δ en choisissant un sens positif, le moment du vecteur AB par rapport à la droite aura une mesure algébri-

Hosted by Google

que. C'est ce nombre que nous appellerons moment du vecteur par rapport à l'axe et nous le représenterons par M^t (AB. Δ). Il a pour valeur absolue 6 fois le volume du tétraèdre défini par AB et un vecteur unité porté par l'axe et est positif si AB est de sens direct par rapport à Δ.

16. **Expression analytique du moment par rapport à un axe.** — Considérons d'abord un axe issu de l'origine des coordonnées rectangulaires, défini par ses cosinus directeurs, α, β, γ; soit X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du vecteur AB, on aura M^t (AB. Δ), en projetant sur Δ le moment OG de AB par rapport à O (14). On a ainsi



$$M^t(AB, \Delta) = L\alpha + M\beta + N\gamma$$

En particulier par rapport à Ox, Oy, Oz les moments sont L, M, N.

Soit maintenant un axe quelconque défini par un point I $(x_0 y_0 z_0)$ et trois cosinus directeurs $\alpha\beta\gamma$.

Projetons sur Δ le moment de AB par rapport à I, nous obtenons

$$\begin{aligned} M^t(AB.\Delta) &= \Sigma\, \alpha\, [\,(y - y_0)\, Z - (z - z_0)\, Y\,] \\ &= \Sigma\, \alpha\, [\, L + z_0 Y - y_0 Z\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^t(AB, \Delta) &= \alpha L + \beta M + \gamma N + \alpha\,(z_0 Y - y_0 Z) + \beta\,(x_0 Z - z_0 X) \\ &+ \gamma\,(y_0 X - x_0 Y) = \alpha L + \beta M + \gamma N + \lambda X + \mu Y + \nu Z \end{aligned}$$

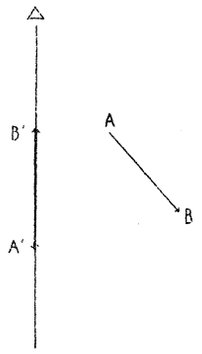
en posant

$$\begin{cases} \lambda = y_0\gamma - z_0\beta \\ \mu = z_0\alpha - x_0\gamma \\ \nu = x_0\beta - y_0\alpha \end{cases}$$

On voit que les six quantités $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ sont les coordonnées du vecteur de mesure $+1$ porté par l'axe.

Hosted by Google

17. Moment d'un vecteur par rapport à un autre vecteur. — Soit deux vecteurs AB, A'B' de coordonnées X, Y, Z, L, M, N, X', Y', Z' L', M', N' respectivement; désignons par Δ l'axe qui porte A'B' et a même sens que lui ; si m est la longueur de A'B', on appelle moment de AB par rapport à A'B' le produit m. M^t (AB.Δ). Soit $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ les coordonnées du segment $+1$ porté par Δ. On a donc :



$$\begin{aligned} & M^t\,(AB.\ A'B') \\ &= m\,(L\alpha + M\beta + N\gamma + X\lambda + Y\mu + Z\nu) \\ &= LX' + MY' + NZ' + XL' + YM' + ZN' \end{aligned}$$

On voit que la valeur absolue de ce moment est six fois le volume du tétraèdre défini par les deux segments AB et A'B'; ce moment est positif si AB a, par rapport à A'B' le sens direct, négatif dans le cas contraire. Enfin, l'expression analytique du moment montre tout de suite que l'on a

$$M^t\,(AB.A'B') = M^t\,(A'B'.AB)$$

Ce moment est nul quand les deux droites qui portent les vecteurs se rencontrent à distance finie ou infinie.

Hosted by Google

LIVRE PREMIER

DU MOUVEMENT SIMPLE D'UN POINT.

CHAPITRE PREMIER

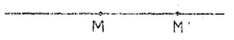
DE LA VITESSE.

---

1. **Trajectoire.** — C'est la ligne décrite par le point mobile dans le système où il se meut.

2. **Mouvement rectiligne uniforme.** — On appelle mouvement uniforme, un mouvement dans lequel le mobile parcourt des longueurs égales en des temps égaux. Au point de vue de la trajectoire et de la loi du mouvement, le mouvement le plus simple est le mouvement rectiligne uniforme. Dans ce cas, on appelle *vitesse* la longueur parcourue par le mobile dans l'unité de temps ; cette longueur est portée par la trajectoire et a un sens déterminé, celui du mouvement; c'est un véritable vecteur qu'on appelle le *vecteur vitesse.*

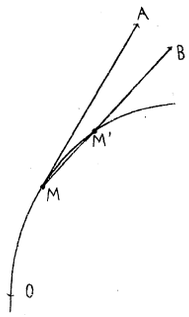
3. **Mouvement rectiligne varié.** — Un mouvement non uniforme est dit varié. Soit sur la trajectoire rectiligne M,M, les positions du mobile aux époques respectives t et $t+\Delta t$; si le mobile allait de M en M′ d'un mouvement uniforme, sa vitesse serait un vecteur de longueur $\frac{MM'}{\Delta t}$



Hosted by Google

ayant le sens du mouvement. Faisons tendre Δt, vers zéro le rapport $\frac{MM'}{\Delta t}$ a une limite en général et le vecteur précédent une limite qui est par définition la vitesse du mobile à l'époque t. Si on prend sur la droite un sens positif et une origine et si x est l'abscisse du point M, la mesure algébrique du vecteur vitesse sera la limite de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ c'est-à-dire $\frac{dx}{dt}$. Nous ne considèrerons jamais que des mouvements ayant une vitesse, c'est-à-dire que les fonctions du temps que nous ferons intervenir pour définir un mouvement seront supposées admettant des dérivées.

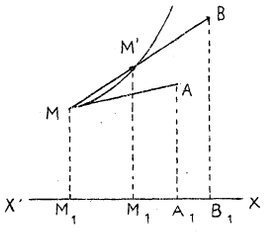
4. **Mouvement curviligne.** — La trajectoire étant une courbe quelconque, soit M et M′ les positions du mobile aux époques t et $t + \Delta t$. Si le mouvement du mobile s'effectuait de M en M′ suivant la corde MM′ et d'une manière uniforme, pendant le temps Δt, la vitesse serait un vecteur MB ayant pour longueur $\frac{MM'}{\Delta t}$ et appelé vitesse *moyenne* pendant le temps Δt; quand Δt tend vers zéro, MB a pour limite un vecteur MA tangent à la trajectoire en M ; ce vecteur est par définition la vitesse à l'époque t. Si on prend sur la courbe un sens positif et une origine O, on pourra définir le point M de la courbe par une abscisse curviligne s et s sera une fonction du temps; le rapport de l'arc à la corde ayant pour limite l'unité quand l'arc tend vers zéro, $\frac{MM'}{\Delta t}$ a pour limite la valeur absolue de $\frac{ds}{dt}$. Si sur la tangente en M on choisit pour sens positif celui qui correspond aux s croissants, le vecteur vitesse aura pour mesure $\frac{ds}{dt}$.



5. **Projection du mouvement sur un axe.** — Soit sur l'axe X′X, M_1 et M'_1 les projections des positions M et

Hosted by Google

M′ du mobile aux époques t et $t + \Delta t$, et M_1B_1, la projection de la vitesse moyenne MB. En vertu du parallélisme des plans projetants, on a :



$$\frac{M_1B_1}{M_1M_1'} = \frac{MB}{MM'} = \frac{1}{\Delta t}$$

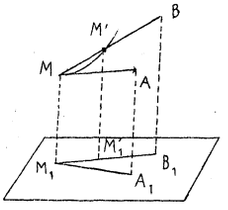
D'où

$$M_1B_1 = \frac{M_1M_1'}{\Delta t}$$

c'est-à-dire que la projection de la vitesse moyenne du mobile pendant le temps Δt est la vitesse moyenne de la projection du mobile pendant le même intervalle. Si on fait tendre Δt vers zéro, on en conclut.

La vitesse de la projection du mobile sur un axe est à chaque instant la projection de la vitesse du mobile.

6. **Projection du mouvement sur un plan.** — Si on projette le mouvement sur un plan, on a, en raison du parallélisme des projetantes



$$\frac{M_1B_1}{M_1M_1'} = \frac{MB}{MM'} = \frac{1}{\Delta t}$$

D'où

$$M_1B_1 = \frac{M_1M_1'}{\Delta t}$$

Ainsi, la vitesse moyenne dans le mouvement projeté est la projection de la vitesse moyenne du mouvement dans l'espace. Si on fait tendre Δt vers zéro, M_1B_1 a pour limite M_1A_1 vitesse de la projection et MB a pour limite MA vitesse de M. Donc :

La vitesse de la projection du mobile sur un plan est à chaque instant la projection de la vitesse du mobile.

7. **Détermination analytique de la vitesse.** — Soit x, y, z, les coordonnées du mobile, qui sont des fonctions de t. Si on désigne par V_x V_y V_z, les mesures algébriques des

Hosted by Google

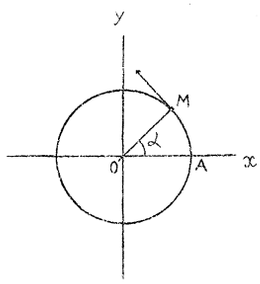
projections de la vitesse sur les axes, on a, d'après les paragraphes 5 et 3.

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt}$$

La longueur v de la vitesse sera si les coordonnées sont rectangulaires

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

8. **Application au mouvement circulaire.** — Soit un point M décrivant un cercle de rayon R. Les coordonnées rectangulaires du mobile sont



$$\begin{cases} x = R \cos \alpha \\ y = R \sin \alpha \end{cases}$$

α étant une fonction du temps.

Prenons pour origine des arcs le point du cercle situé sur Ox et pour sens positif le sens choisi en trigonométrie. On aura alors

$$s = R\alpha. \quad \frac{ds}{dt} = R\frac{d\alpha}{dt} = R\omega. \quad \text{en posant } \omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

ω a reçu le nom de *vitesse angulaire* du point M

Les projections de la vitesse sur les axes sont

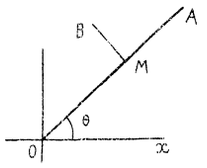
$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = -R \sin \alpha . \dfrac{d\alpha}{dt} = -\omega y \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \quad R \cos \alpha . \dfrac{d\alpha}{dt} = \quad \omega x \end{cases}$$

Hosted by Google

CHAPITRE II

PROJECTIONS ORTHOGONALES DE LA VITESSE.

1. Coordonnées polaires planes. — Soit ρ et θ les coordonnées polaires du mobile M. Projetons la vitesse du point M sur le rayon vecteur et la perpendiculaire MB au rayon vecteur. Cherchons les mesures algébriques de ces projections. Nous prenons pour sens positif sur le rayon vecteur le sens de O vers M, et sur MB le sens de la demi-droite qui fait avec Ox l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ On a entre les coordonnées rectilignes rectangulaires et les coordonnées polaires les relations



$$x = \rho \cos \theta \qquad y = \rho \sin \theta$$

d'où

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{d\rho}{dt} \cos \theta - \rho \sin \theta \dfrac{d\theta}{dt} \\ V_y = \dfrac{d\rho}{dt} \sin \theta + \rho \cos \theta \dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Par suite

$$\text{project sur MA} = \quad V_x \cos \theta + V_y \sin \theta = \frac{d\rho}{dt}$$

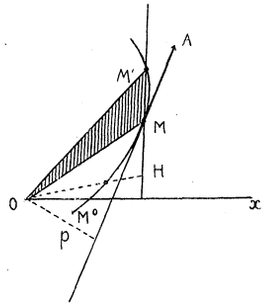
$$\text{project sur MB} = -V_x \sin \theta + V_y \cos \theta = \rho \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\rho}{dt}$ s'appelle la *vitesse de glissement* ou d'élongation

$\rho \frac{d\theta}{dt}$ la *vitesse de circulation*

Hosted by Google

2. **Vitesse aréolaire.** — Au système de coordonnées polaires se rattache une nouvelle vitesse que nous allons définir.



Soit M,M′ les positions du mobile à l'époque t et $t + \Delta t$, M_0 une origine sur la courbe.

Posons $u =$ aire M_0OM, Δu a pour valeur absolue aire MOM′ ; $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ est appelé vitesse aréolaire moyenne pendant l'intervalle Δt; sa limite $\frac{du}{dt}$ est la vitesse aréolaire à l'époque t.

Cherchons l'expression de la vitesse aréolaire en coordonnées polaires. On a

$$\tfrac{1}{2}\rho^2\Delta\theta < \Delta u < \tfrac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2\,\Delta\theta$$

d'où

$$\frac{du}{dt} = \tfrac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt}$$

En coordonnées rectangulaires on a

$$tg\theta = \frac{y}{x};\ \text{d'où}\ \frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2}$$

et

$$\frac{du}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

La vitesse aréolaire est liée d'une manière très simple à la vitesse du point M; on a, en effet, $\Delta u = \frac{MM' \times OH}{2}$, OH étant la hauteur du triangle infinitésimal OMM′. D'où on tire

$$\frac{du}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{ds}{dt}p$$

p désignant la distance du pôle à la tangente.

Hosted by Google

La relation précédente peut s'énoncer ainsi :

La vitesse aréolaire à l'époque t *est le moment par rapport à l'origine de la vitesse du mobile à la même époque.*

3. **Application au mouvement des planètes.** — D'après la première loi de Képler, ou loi des aires, le rayon qui va du centre du soleil au centre de la planète, décrit des aires proportionnelles au temps ; avec la définition précédente, la loi peut s'énoncer ainsi : *La vitesse aréolaire de la planète est constante.* On désigne cette constante par $\frac{C}{2}$ et l'on a

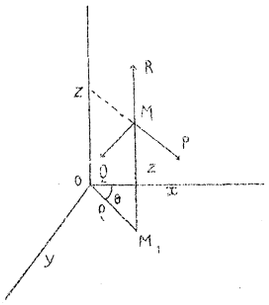
$$u = \frac{C}{2} t, \quad \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} p$$

d'où

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C}{p}$$

La vitesse de la planète est inversement proportionnelle à la perpendiculaire menée du soleil sur la tangente à la trajectoire. Cette proposition est due à Newton (*Principia*, page 35, édition de 1723).

4. **Coordonnées semi-polaires ou cylindriques.** — Un point M de l'espace est défini par sa cote z, et les coordonnées polaires ρ, θ de sa projection sur Oxy, Ox étant l'axe polaire. Les surfaces ρ = const. sont les cylindres de révolution d'axe Oz ; les surfaces θ = const. sont les plans passant par Oz, et les surfaces z = const. les plans normaux à Oz ; les trois surfaces passant par M se coupent orthogonalement. Nous nous proposons de trouver les projections de la vitesse, sur les tangentes aux trois lignes d'intersection de ces surfaces prises deux à deux, les sens



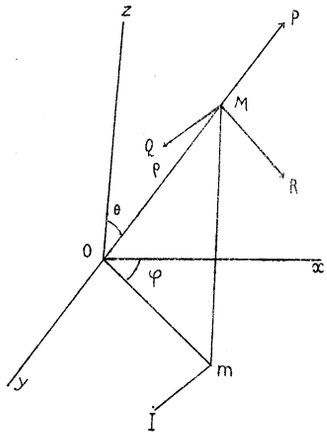
positifs étant ceux qui correspondent aux coordonnées croissantes. D'après ce qui précède, ces projections sont (nos 5, 6, chap. I; n° 1, chap. II).

$$\frac{d\rho}{dt}, \quad \rho\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

La longueur V de la vitesse du point M est donnée par

$$V^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

5. **Coordonnées polaires ou sphériques.** — On définit un point M de l'espace par sa distance ρ à l'origine, l'angle θ de la demi-droite OM avec Oz, et l'angle φ de Ox avec Om, m étant la projection de M sur le plan xoy. Les surfaces $\rho =$ const. sont les sphères de centre o, $\varphi =$ const. sont les plans passant par Oz, et $\theta =$ const. les cônes de révolution d'axe Oz. Les trois surfaces passant par M se coupent orthogonalement. Nous allons chercher les projections de la vitesse sur les tangentes aux courbes d'intersection de ces surfaces deux à deux, les sens positifs pris sur ces tangentes correspondant aux coordonnées ρ, θ, φ, croissantes.



Considérons d'abord la vitesse comme la résultante de sa projection sur Oz et sur le plan xoy.

La première de ces projections a pour expression

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\cos\theta\right)$$

Quant à la seconde, on peut la remplacer par ses deux projec-

Hosted by Google

tions sur le prolongement de Om, et la perpendiculaire $m\dot{I}$ à Om, respectivement égales à (n° 1, chap. II).

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \sin \theta\right) \quad \text{et à } \rho \sin \theta \ \frac{d\varphi}{dt}$$

En définitive, la vitesse peut être regardée comme résultante de trois vecteurs de mesures.

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \cos \theta\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\rho \sin \theta\right), \quad \rho \sin \theta \ \frac{d\varphi}{dt}$$

On aura donc :

$$\text{project. sur MP} = \frac{d}{dt}\left(\rho \cos \theta\right) \cos \theta + \frac{d}{dt}\left(\rho \sin \theta\right) \sin \theta = \frac{d\rho}{dt}$$

$$\text{project. sur MQ} = \frac{d}{dt}\left(\rho \cos \theta\right) \cos \frac{\pi}{2} + \frac{d}{dt}\left(\rho \cos \theta\right) \cos \frac{\pi}{2}$$
$$+ \rho \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \cos 0 = \rho \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\text{project. sur MR} = \frac{d}{dt}\left(\rho \cos \theta\right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \frac{d}{dt}\left(\rho \sin \theta\right) \cos \theta = \rho \frac{d\theta}{dt}$$

6. **Coordonnées curvilignes.** — Soit x, y, z des coordonnées rectilignes rectangulaires; q_1, q_2, q_3 3 paramètres variables et considérons les trois familles de surfaces.

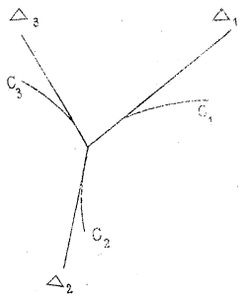
$$q_1 = F_1(x, y, z) \quad q_2 = F_2(x, y, z) \quad q_3 = F_3(x, y, z) \qquad (1)$$

Par un point M de l'espace, il passe trois de ces surfaces S_1, S_2, S_3; nous appellerons les paramètres de ces trois surfaces *coordonnées curvilignes* du point M. Les relations (1) expriment les coordonnées curvilignes à l'aide des coordonnées rectangulaires; inversement en résolvant les équations (1) par rapport à xyz. On a :

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3) \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3) \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3) \qquad (2)$$

Hosted by Google

Les courbes d'intersection deux à deux des trois surfaces qui passent par M sont les trois courbes obtenues en faisant dans les équations (2) varier successivement q_1, q_2, q_3. La courbe q_1 variable par exemple est à l'intersection de S_2 et S_3. Ces courbes $C_1\, C_2\, C_3$ sont dites *courbes de coordonnées*. Nous nous proposons de chercher les composantes de la vitesse suivant les tangentes Δ_1, Δ_2, Δ_3 à ces trois courbes, le sens positif sur chaque tangente étant celui qui correspond au sens des q croissants. On a



$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{at} + \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} = \sum \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} \qquad i = 1, 2, 3$$

Soit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ les cosinus directeurs du sens positif de la tangente Δ_i

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial q_i}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}} \text{ etc.}$$

par suite

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_1 \dfrac{dq_1}{dt}\alpha_1 + A_2 \dfrac{dq_2}{dt}\alpha_2 + A_3 \dfrac{dq_3}{dt}\alpha_3 \\ \dfrac{dy}{dt} = A_1 \dfrac{dq_1}{dt}\beta_1 + A_2 \dfrac{dq_2}{dt}\beta_2 + A_3 \dfrac{dq_3}{dt}\beta_3 \\ \dfrac{dz}{dt} = A_1 \dfrac{dq_1}{dt}\gamma_1 + A_2 \dfrac{dq_2}{dt}\gamma_2 + A_3 \dfrac{dq_3}{dt}\gamma_3 \end{cases}$$

en posant

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

Hosted by Google

Ces relations montrent que les composants de la vitesse suivant $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ sont respectivement

$$A_1 \frac{dq_1}{dt},\quad A_2 \frac{dq_2}{dt},\quad A_3 \frac{dq_3}{dt}$$

ou

$$A_1 q'_1,\quad A_2 q'_2,\quad A_3 q'_3$$

en posant

$$q'_i = \frac{dq_i}{dt}$$

7. — Si au lieu des composantes suivant $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ on prend les projections orthogonales de la vitesse, les expressions obtenues sont moins simples ; on a, par exemple :

$$v_1 = \text{project. sur } \Delta_1 = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z'$$

en posant

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad \text{etc.}$$

Le second membre peut être transformé. On a

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} q'_3 \right)^2$$
$$= A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + A_3 q_3'^2 + 2B_1 q'_2 q'_3 + 2B_2 q'_3 q'_1 + 2B_3 q'_1 q'_2$$

2T. est ainsi une forme quadratique par rapport aux q' dont les coefficients sont fonctions des q. On a

$$A_1 v_1 = x' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \qquad \text{Or, } \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial x'}{\partial q'_1}$$

puisque

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_3} q'_3$$

d'où

$$A_1 v_1 = x' \frac{\partial x'}{\partial q'_1} + \quad \ldots . \quad + z' \frac{\partial z'}{\partial q'_1} = \frac{\partial T}{\partial q'_1}$$

Les projections orthogonales de la vitesse sont donc :

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T}{\partial q'_1},\quad \frac{1}{A_2} \frac{\partial T}{\partial q'_2},\quad \frac{1}{A_3} \frac{\partial T}{\partial q'_3}$$

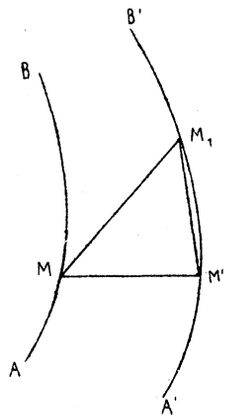
Hosted by Google

CHAPITRE III

COMPOSITION DES VITESSES — CONSTRUCTION DES TANGENTES.

1. — Un mobile se meut dans un système S, lui-même emporté dans un système plus vaste S_1. On dit que le système S, appelé *système mobile* ou de *comparaison*, a un *mouvement d'entraînement* dans le système S_1 appelé *système fixe*. Par rapport au système S, le mouvement du point est qualifié de mouvement *relatif* ou apparent; son mouvement, par rapport au système S_1, qui dépend à la fois du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement s'appelle *mouvement absolu*.

2. — Soit AB la position de la trajectoire relative à l'époque t, M la position du mobile sur cette trajectoire à l'époque t. — Au bout du temps Δt la trajectoire est en A'B' et le mobile en M_1 — Le point du système de comparaison, qui coïncide avec le mobile à l'époque t et qui est dit *point coïncidant* est en M' après le temps Δt.



La corde MM_1 du déplacement absolu est la résultante de la corde MM' du déplacement d'entraînement, et de la corde $M'M_1$ du déplacement relatif. Il en est de même pour les quotients de ces vecteurs infiniment petits

Hosted by Google

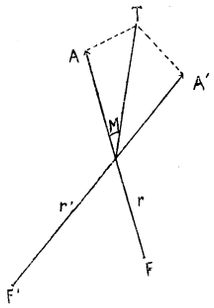
par Δt. En passant à la limite, on voit que :

La vitesse absolue du mobile est à chaque instant la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. Nous entendons par vitesse d'entraînement la vitesse à l'époque t du point coïncidant. Connaissant deux quelconques de ces trois vitesses, on saura donc, par une règle simple, en déduire la troisième.

3. **Généralisation.** — Soit n systèmes invariables S_1 S_2.. S_n, tels que chacun d'eux se meut dans le suivant; P un point en mouvement dans le système S_1 et P_1, P_2, ... P_{n-1}, les $n-1$ points des $n-1$ premiers systèmes qui, à l'époque t, coïncident avec P... Désignons par V_1 la vitesse de P_1 par rapport à S_2, par V_2 celle de P_2 par rapport à S_3 et ainsi de suite jusqu'à V_{n-1} vitesse de P_{n-1} par rapport au système S_n. La vitesse de P dans S_2 est la résultante de la vitesse relative V_r et de la vitesse d'entraînement V_1. La vitesse de P dans S_3 est la résultante de la vitesse de P dans S_2 et de V_2 et par suite la résultante des trois vitesses V_r, V_1, V_2. Et ainsi de suite. Donc :

La vitesse du mobile, par rapport au dernier système S_n *est la résultante de* V_r, V_1, V_2, V_{n-1}.

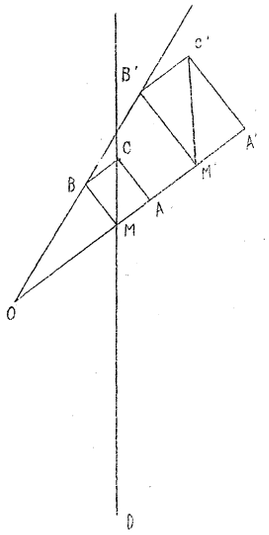
4. **Construction des tangentes.** — Roberval, le premier a déduit de la considération des mouvements simultanés une solution du problème des tangentes aux lignes courbes (communication à Fermat 1640, mémoire lu à l'Académie des sciences 1668). Si on considère, en effet, avec Roberval, la tangente à une courbe comme portant la vitesse d'un mobile assujetti à décrire cette courbe, il suffira, pour être en mesure de tracer la tangente, de connaître deux composantes de cette vitesse, ou simplement deux vecteurs proportionnels à ces composantes. En particulier, supposons la courbe définie en coordonnées bipolaires r, r' F et F′ étant les deux



Hosted by Google

pôles. La projection orthogonale de la vitesse sur le rayon vecteur FM est $\frac{dr}{dt}$ le sens positif étant celui de FM ; de même sur F′M, elle est $\frac{dr'}{dt}$. Si MA et MA′ sont des vecteurs de mesures proportionnelles à $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr'}{dt}$ il suffira de mener en A et A′ des perdiculaires aux rayons vecteurs. Leur intersection sera un point de la tangente. La construction s'applique immédiatement à l'éllipse, l'hyperbole, aux ovales de Descartes.

5. **Tangente à la Conchoïde.** — Comme nouvelle application de la méthode de Roberval, indiquons la construction de la tangente à la conchoïde de Nicomède (150 ans avant J.-C.) ou conchoïde de droite. Rappelons la définition de la courbe ; pour un point fixe O, on mène une sécante qui coupe une droite fixe D en M ; sur cette sécante, on prend à partir du point M une longueur constante MM′ = a ; la conchoïde est le lieu de M′ quand la sécante varie.



On peut représenter la vitesse de M par un vecteur MC de longueur arbitraire. Ses projections sur le prolongement du rayon vecteur et la perpendiculaire à ce rayon sont :

$$MA = \frac{d\rho}{dt}; \quad MB = \rho \frac{d0}{dt}$$

Pour le point M′ on a de même

$$M'A' = \frac{d(\rho + a)}{dt} \quad M'B' = (\rho + a)\frac{d0}{dt}$$

Hosted by Google

On a donc

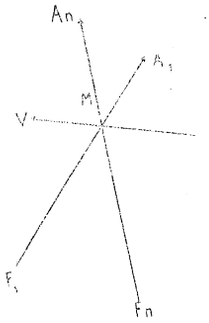
$$M'A' = MA, \quad \frac{M'B'}{MB} = \frac{OM'}{OM}$$

c'est-à-dire que B′ se trouve sur OB.

Ces relations entraînent une construction très simple de la tangente en M′ indiquée sur la figure.

— Pour une conchoïde de courbe, la construction de la tangente reste la même ; on remplacera la droite D par la tangente à la courbe en M.

Tangentes aux courbes en coordonnées multi-polaires. — Considérons dans le plan une courbe définie par la relation $f(r_1, r_2, r_n) = o$ entre les distances d'un point de la courbe à n pôles $F_1F_2 \ldots F_n$. On a pour une telle courbe une construction très simple de la tangente due à Poinsot.



Sur le rayon vecteur, $F_i M$, portons un vecteur MA_i de mesure $\frac{\partial f}{\partial r_i}$ le sens positif étant celui de F_iM.

La résultante de tous les vecteurs MA_i *est normale à la courbe en* M. — Nous allons montrer, en effet, que la somme des projections de ces vecteurs sur la vitesse v du point M est nulle. Soit α_i l'angle de F_iM avec la vitesse.

Il faut établir que $\sum \frac{\partial f}{\partial r} \cos \alpha_i = 0$. Or, on a $\frac{dr_i}{dt} = v \cos \alpha_i$, $\cos \alpha_i$ est proportionnel à $\frac{dr_i}{dt}$ et on est ramené à $\sum \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} = 0$ relation qui résulte de l'équation de la courbe par différentiation.

Cette construction s'applique en particulier aux courbes définies en coordonnées bi-polaires, à l'ellipse, l'hyperbole, aux ovales de Descartes, de Cassini, etc. On retrouve les propriétés bien connues des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole.

Hosted by Google

Hosted by Google

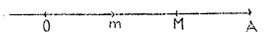
LIVRE II

MOUVEMENT SIMPLE D'UN POINT. — DE L'ACCÉLÉRATION

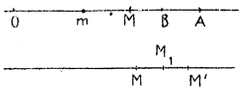
CHAPITRE PREMIER

DÉFINITION DE L'ACCÉLÉRATION.

1. Mouvement rectiligne uniformément varié. — Un mouvement rectiligne est dit uniformément varié, si la vitesse varie de quantités égales en des temps égaux. La variation de la vitesse, pendant l'unité de temps, s'appelle l'accélération. Si dans un intervalle de temps Δt la variation de la mesure v du vecteur vitesse est Δv, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est constant et mesure le *vecteur accélération*. Le vecteur vitesse MA du mobile à l'époque t étant transporté en Om de manière que son origine soit fixe en O, on peut encore dire que l'accélération du point M est la vitesse du point m.



2. Mouvement rectiligne quelconque. — Pendant le temps Δt, la vitesse MA du point M subit une variation géométrique MB dirigée suivant la droite ; le quotient $\frac{MB}{\Delta t}$ est un vecteur qu'on appelle *accélération moyenne*, relative à l'intervalle Δt. La limite de ce vecteur pour Δt tendant vers zéro est *l'accélération* à l'époque t. On voit que si on suppose la



Hosted by Google

vitesse MA constamment transportée en Om de manière que son origine soit fixe en O, l'accélération du point M est la vitesse du point m. Le point m, O étant pris pour origine et x étant l'abscisse de M, a pour abscisse $\frac{dx}{dt}$. L'accélération du point M aura donc pour mesure $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$

On peut donner une autre définition de l'accélération ; soit M′ la position du mobile à l'époque $t + \Delta t$. On aura

$$\overline{MM'} = v\Delta t + \tfrac{1}{2}\gamma(\Delta t)^2 + \alpha(\Delta t)^3$$

α ayant une limite finie quand Δt tend vers zéro

d'où

$$\gamma = \lim 2\left(\frac{\overline{MM'} - v\Delta t}{(\Delta t)^2}\right)$$

Si, à partir du point M, le mouvement devenait uniforme, à l'époque $t + \Delta t$ le mobile serait en M_1, tel que

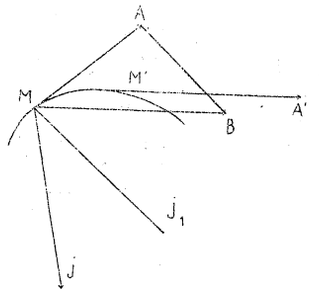
$$\overline{MM_1} = v\Delta t$$

on a enfin

$$\gamma = \lim 2\frac{\overline{M_1M'}}{(\Delta t)^2}$$

et, par suite, l'accélération est la limite du vecteur $\frac{2M_1M'}{(\Delta t)^2}$

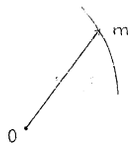
3. **Mouvement curviligne.** — Soit M, M′ les positions du mobile aux époques t, $t + \Delta t$, et MA, M′A′ les vitesses correspondantes. Menons le vecteur MB égal à M′A′, parallèle et de même sens. Ce vecteur MB est la somme géométrique de MA et AB, en sorte qu'on peut considérer AB comme la variation géométrique de la vitesse pendant le temps Δt.



Hosted by Google

Le vecteur MJ_1 égal, parallèle et de même sens à $\frac{AB}{\Delta t}$ est l'accélération moyenne pendant l'intervalle Δt ; sa limite MJ quand Δt s'annule est par définition l'accélération à l'époque t. Le plan AMB ayant comme on sait pour limite le plan osculateur en M, on voit que l'accélération est dans ce plan osculateur ; elle est en outre, par rapport au plan de la tangente et de la binormale du même côté que le centre de courbure.

4. **Hodographe.** — Par un point fixe O, menons le vecteur Om obtenu en transportant la vitesse de manière que son origine vienne en O. On voit que l'accélération du point M, à une translation près, n'est autre que la vitesse du point m. Le point m décrit une courbe appelée *hodographe*. Si O est l'origine des coordonnées, (x, y, z) étant les coordonnées de M, celles de m seront

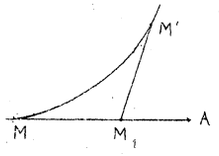


$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

et par suite les projections de l'accélération sur les axes ont pour expression :

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

5. **Autre définition de l'accélération.** — M et M′ étant les positions du mobile aux époques t et $t + \Delta t$, et v, sa vitesse à l'époque t, prenons sur la tangente en M à la trajectoire $MM_1 = v\Delta t$, le point M_1 est la position que prendrait le mobile au bout du temps Δt, si à partir de M le mouvement s'effectuait uniformément suivant la tangente. Le vecteur M_1M' a été nommé



Hosted by Google

par Duhamel, *déviation*. Nous allons voir que *l'accélération est la limite du vecteur* $\frac{2M_1M'}{(\Delta t)^2}$

On a en effet

$$\text{project } M_1M'_x = \left(x + \Delta x\right) - \left(x + \frac{dx}{dt}\Delta t\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{2} + \alpha\Delta t^3$$

α ayant une limite finie pour $\Delta t = o$.

d'où

$$\text{lim. project}\left(\frac{2M_1M'}{(\Delta t)^2}\right)_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De même pour les deux autres axes. Le vecteur $\frac{2M_1M'}{(\Delta t)^2}$ a donc une limite qui est l'accélération.

6. **Projections de l'accélération.** — Soit MA et MB des vecteurs égaux et parallèles aux vitesses aux époques t et $t + \Delta t$; les projections de MA et MB, sur une droite ou sur un plan, seront les vitesses de la projection du mobile aux mêmes époques. Il en résulte que le vecteur AB, variation géométrique de la vitesse du mobile de l'espace pendant le temps Δt, se projettera suivant un vecteur A'B' qui représente la variation géométrique de la vitesse du mobile projection pendant le même temps et l'accélération moyenne $\frac{AB}{\Delta t}$ du mobile de l'espace, aura pour projection $\frac{A'B'}{\Delta t}$, c'est-à-dire l'accélération moyenne du mobile projection. D'où, en faisant tendre Δt vers zéro ce théorème :

L'accélération du mobile projection est à chaque instant la projection de l'accélération du mobile de l'espace.

7. **Accélération d'ordre supérieur.** — En opérant sur les vecteurs qui représentent l'accélération au temps t et $t + \Delta t$, comme on l'a fait avec ceux qui représentent la vitesse, on obtiendrait un nouveau vecteur représentant *l'accélération du*

Hosted by Google

deuxième ordre ou suraccélération, ayant pour projections sur les axes

$$\frac{d^3x}{dt^3}, \quad \frac{d^3y}{dt^3}, \quad \frac{d^3z}{dt^3}$$

En continuant de la sorte, on définirait l'accélération d'ordre n qui a pour projections :

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}$$

Hosted by Google

CHAPITRE II

PROJECTIONS DE L'ACCÉLÉRATION.

Nous avons, dans le chapitre précédent, décomposé l'accélération suivant des axes fixes. Maclaurin, en 1742, en a donné le premier exemple (*Traité des fluxions*, vol. 1, art. 465 et suivants). Nous chercherons à présent l'expression des projections orthogonales de l'accélération sur certaines droites liées à la trajectoire du mobile, de même que nous l'avons fait pour la vitesse.

1. **Projections sur la tangente et la normale principale.** — Soient en coordonnées rectangulaires, x, y, z, les coordonnées du mobile M, v sa vitesse au temps t, α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente menée dans le sens des arcs croissants, $\alpha'\beta'\gamma'$ ceux de la normale principale, $d\sigma$ l'angle de contingence, R le rayon de courbure au point M. On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(v\alpha\right) = \frac{dv}{dt}.\alpha + v\frac{d\alpha}{dt}$$

D'après les formules de Frenet

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\alpha' d\sigma}{dt} = \alpha'\frac{ds}{dt}.\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\alpha' v}{R}$$

et par suite

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \alpha\dfrac{dv}{dt} + \alpha'\dfrac{v^2}{R} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \beta\dfrac{dv}{dt} + \beta'\dfrac{v^2}{R} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \gamma\dfrac{dv}{dt} + \gamma'\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

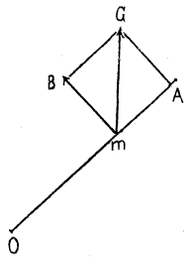
Hosted by Google

Ces relations montrent que l'accélération est la résultante de deux vecteurs; l'un porté par la tangente a pour mesure

$$J_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

On l'appelle *accélération tangentielle;* l'autre, porté par la normale principale a le sens de cette normale et pour longueur $J_n = \frac{v^2}{R}$; il est dit *accélération normale.*

Ce mode de décomposition de l'accélération a été employé par Newton (*Principia* 1687) et par Euler dans sa mécanique publiée en 1736, le premier ouvrage où la science du mouvement soit ramenée à des questions d'analyse. J'indiquerai un moyen à peu près intuitif pour retrouver le résultat précédent; il suffit de prendre pour origine d'un système de coordonnées polaires dans l'espace le sommet du cône directeur des tangentes à la trajectoire et de considérer l'accélération mG comme la vitesse du point décrivant l'hodographe. Alors



$$\rho = Om = v \quad \text{et } J_t = mA = \frac{d\rho}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

D'autre part :

$$J_n = mB = \rho . \frac{d\sigma}{dt} = v \frac{d\sigma}{ds} . \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

2. **Application au mouvement circulaire.** — On a dans ce cas $v = R\omega$.
par suite

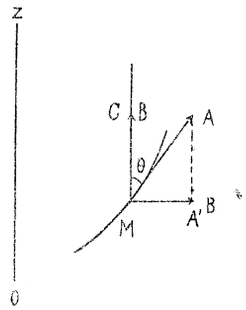
$$J_t = R \frac{d\omega}{dt}$$

$$J_n = \omega^2 R$$

Si le mouvement est uniforme, ω est constant et $\frac{d\omega}{dt} = 0$. L'accélération J se réduit à l'accélération normale et a pour valeur $J = \frac{v^2}{R}$

Hosted by Google

3. **Rayon de courbure de l'hélice.** — La relation $J_n = \frac{v^2}{R}$ permet, dans certains cas, de déterminer le rayon de courbure d'une courbe. Soit, par exemple, une hélice, c'est-à-dire une courbe tracée sur un cylindre coupant toutes les génératrices sous un angle constant θ.



Supposons-la décrite par un mobile M d'un mouvement uniforme avec une vitesse v. Projetons le mouvement sur un axe Oz parallèle aux génératrices et sur le plan P de la section droite passant par M. Le mouvement projeté sur Oz est uniforme ; par conséquent, l'accélération J du point M est dans le plan de la section droite et coïncide avec l'accélération J' dans le mouvement de la projection de M sur le plan P ; soit v' la vitesse constante de cette projection, R' le rayon de courbure de la section droite en M, R celui de l'hélice, on aura puisque $J' = J$:

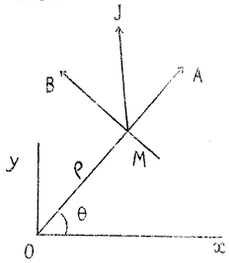
$$\frac{v'^2}{R'} = \frac{v^2}{R};$$

or

$$v' = v \sin \theta$$

d'où

$$R = \frac{R'}{\sin^2 \theta}$$



4. **Projections en coordonnées polaires planes.** — La projection de MJ sur le rayon vecteur a pour expression, en posant

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad x'' = \frac{dx^2}{dt^2} \text{ etc.}$$

$$x'' \cos \theta + y'' \cos \theta = \frac{1}{\rho}\left(xx'' + yy''\right) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}\left(xx' + yy'\right) - \left(x'^2 + y'^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}\left(\rho\rho'\right) - \left(\rho'^2 + \rho^2\theta'^2\right)\right] = \frac{1}{\rho}\left[\rho\rho'' - \rho^2\theta'^2\right] = \rho'' - \rho\theta'^2$$

Hosted by Google

La projection sur la perpendiculaire au rayon vecteur, faisant avec Ox l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ est

$$x'' \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + y'' \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -x'' \sin\theta + y'' \cos\theta$$

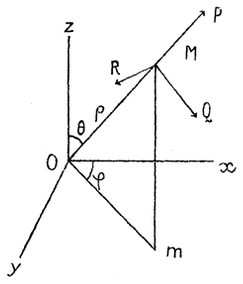
$$= \frac{1}{\rho}\left(xy'' - yx''\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(xy' - yx'\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\theta'\right) = 2\rho\theta' + \rho\theta''$$

5. **Coordonnées semi-polaires.** — De ce qui précède, il résulte immédiatement que les projections ont les expressions suivantes :

sur Oz : $\frac{d^2z}{dt^2}$.

sur Ox et Oy : $\rho'' - \rho\theta'^2$ et $\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}\left(\rho^2\theta'\right)$

6. **Coordonnées polaires dans l'espace.** — Nous considèrerons l'accélération du point M comme la résultante de la projection de M sur Oz, et de l'accélération de la projection m de M sur xy, cette dernière étant à son tour remplacée par ses composantes sur le rayon vecteur Om et la perpendiculaire à ce rayon.



Ces trois composantes sont :

$$(\rho\cos\theta)'', \quad (\rho\sin\theta)'' - \rho\sin\theta\,\varphi'^2, \quad \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\sin^2\theta\varphi'\right)$$

Nous aurons :

$$\text{project sur MP} = (\rho\cos\theta)''\cos\theta + \sin\theta\left[(\rho\sin\theta)'' - \rho\sin\theta\,\varphi'^2\right]$$
$$= \rho'' - \rho\theta'^2 - \rho\sin^2\theta\varphi'^2$$

Hosted by Google

$$\text{project sur MQ} = -(\rho\cos\theta)''\sin\theta + \cos\theta\,[(\rho\sin\theta)'' - \rho\sin\theta\,\varphi'^2]$$

$$= 2\rho'\theta' + \rho\theta'' - \rho\sin\theta\cos\theta\varphi'^2 = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\theta') - \rho\sin\theta.\cos\theta\varphi'^2$$

$$\text{project sur MR} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{d}{dt}(\rho^2\sin^2\theta\varphi')$$

7. **Coordonnées curvilignes.** — Reprenons les coordonnées curvilignes $q_1 q_2 q_3$ et la forme quadratique $2\,T = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Nous allons voir qu'en introduisant 2T, les projections orthogonales de l'accélération J sur les tangentes $\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3$ aux courbes coordonnées, ont des expressions simples. On a :

$$J\Delta_1 = x''\alpha_1 + y''\beta_1 + z''\gamma_1 \qquad A_1 J\Delta_1 = x''\frac{\partial x}{\partial q_1} + y''\frac{\partial y}{\partial q_1} + z''\frac{\partial z}{\partial q_1}$$

$$A_1\,J_{\Delta_1} = \frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial x}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$$

$$-\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]$$

D'après un calcul déjà fait la première parenthèse est $\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}$.

On a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}q'_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 q_3}q'_3 = \frac{\partial x'}{\partial q_1}$$

La deuxième parenthèse est donc

$$x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1}$$

Par suite

$$J_{\Delta_i} = \frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \qquad i = 1.2.3.$$

8. **Projections de la suraccélération.** — Nous allons chercher les projections de la suraccélération sur la tangente à la

Hosted by Google

trajectoire, la normale principale, et la bi-normale. Nous avons obtenu :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{dv}{dt} + \alpha' \frac{v^2}{R}$$

d'où

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \alpha \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \alpha' \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right) + \frac{v^2}{R}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)$$

Or si on désigne par $\alpha''\beta''\gamma''$ les cosinus directeurs de la binormale, $d\sigma$, $d\tau$ l'angle de contingence et de torsion :

$$d\alpha = \alpha' d\sigma$$
$$d\alpha' = -\alpha d\sigma - \alpha'' d\tau$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{v\alpha'}{R}$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -\frac{\alpha v}{R} - \alpha'' \frac{v}{T}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^3x}{dt^3} &= \alpha\left(\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}\right) + \alpha'\left[\frac{v}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right)\right] - \alpha''\frac{v^3}{RT} \\
\frac{d^3y}{dt^3} &= \beta\left(\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}\right) + \beta'\left[\frac{v}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right)\right] - \beta''\frac{v^3}{RT} \\
\frac{d^3z}{dt^3} &= \gamma\left(\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}\right) + \gamma'\left[\frac{v}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right)\right] - \gamma''\frac{v^3}{RT}
\end{aligned}\right.$$

Ces trois égalités montrent que la suraccélération est la résultante de trois vecteurs portés par la tangente, la normale principale et la binormale ayant respectivement pour mesure :

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}, \quad \frac{v}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right), \quad -\frac{v^3}{RT}$$

Hosted by Google

CHAPITRE III

ACCÉLÉRATIONS CENTRALES.

1. Nous dirons que l'accélération d'un mouvement est centrale lorsqu'elle passe constamment par un point fixe. Prenons ce point fixe pour origine de coordonnées rectangulaires, soit x,y,z les coordonnées du mobile x',x'' les dérivées première et seconde de x par rapport au temps. Si l'accélération passe constamment par O, on a :

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = \frac{z''}{z}.$$

D'où par exemple :

$$yz'' - zy'' = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}(yz' - zy') = 0.$$

On a donc par intégration

$$(1) \qquad \begin{cases} yz' - zy' = \mathrm{A} \\ zx' - xz' = \mathrm{B} \\ xy' - y\mathrm{x}' = \mathrm{C} \end{cases}$$

A, B, C, désignant trois constantes. Des relations (1), on tire $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0$. Donc :

Si l'accélération est centrale, la trajectoire est contenue dans un plan passant par le centre.

Hosted by Google

Si on prend ce plan pour plan des xy, les relations (1) se réduisent à :

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

ou en passant aux coordonnées polaires r, θ

$$\text{(I)} \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = C$$

Par suite. *La vitesse aréolaire est constante, le centre étant pris comme pôle.*

Rappelons que la relation (I) revient à

$$\text{(I')} \quad pv = C$$

p désignant la distance du centre O à la vitesse.

Réciproquement : *Si la trajectoire est dans un plan passant par* O *et si* O *étant pris pour pôle la vitesse aréolaire est constante, l'accélération passe constamment par* O.

Prenons en effet, le plan pour plan xOy on a

$$z = o \qquad xy' - yx' = C$$

d'où

$$z'' = 0 \quad \frac{x''}{x} = \frac{y''}{y}$$

et par suite l'accélération passe par O.

Cette double proposition est due à Newton (*Principia*, pages 34 et 35, édit. 1723).

2. Diverses expressions de la vitesse. — On a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}$$

ou en tenant compte de $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$

$$v^2 = \frac{C^2(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{r^4 d\theta^2} = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] \text{(II)}$$

Hosted by Google

La vitesse est ainsi connue étant donné la trajectoire et la constante des aires.

Si on élimine θ, on obtient $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}$; la vitesse est ainsi connue si on se donne la constante des aires et le rayon vecteur en fonction du temps.

Nous indiquerons enfin une relation simple entre la vitesse et l'accélération. Soit γ la mesure de celle-ci quand on prend pour sens positif non plus celui de O vers M, mais le sens opposé.

On a alors :

$$x'' = -\gamma \frac{x}{r} \qquad y'' = -\gamma \frac{y}{r}$$

d'où

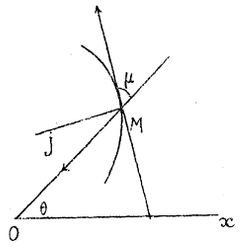
$$x'x'' + y'y'' = -\frac{\gamma}{r}(xx' + yy') \quad \text{et} \quad \frac{dv^2}{dt} = -\frac{\gamma}{r}\frac{dr^2}{dt} = -2\gamma\frac{dr}{dt}$$

par suite

$$\text{(III)} \quad v^2 - v_0^2 = -2\int_{r_0}^{r} \gamma\, dr$$

proposition due encore à Newton (*Principia* page 114).

3. **Expressions diverses de l'accélération.** — Désignons par μ l'angle de la vitesse avec le rayon vecteur. Projetons l'accélération sur la normale et soit R le rayon de courbure en M. Nous aurons :



$$\gamma \sin \mu = \frac{v^2}{R}$$

d'où

$$\gamma = \frac{v^2}{R \sin \mu} = \frac{C^2 r}{R p^3} \quad \text{(IV)}$$

en tenant compte de $p = r \sin \mu$ et de (I')

Hosted by Google

Cette formule est due à Moivre qui la communiqua à Jean Bernouilli, en 1705, mais sans démonstration. Celui-ci répliqua par l'envoi de la démonstration (lettre datée de Bâle, 16 février 1706).

La formule (IV) peut se mettre sous la forme

$$\text{(IV)}' \qquad \gamma = \frac{C^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr}$$

Montrons en effet qu'on a

$$\frac{dp}{dr} = \frac{r}{R}$$

or

$$\frac{dp}{dr} = \sin \mu + r \cos \mu \frac{d\mu}{dr}$$

$$dr = ds \cos \mu$$

$$r d\theta = ds \sin \mu$$

d'où

$$\frac{dp}{dr} = \frac{r}{ds} (d\theta + d\mu) = \frac{r}{R}$$

car l'angle de contingence en M est $d\theta + d\mu$.

Indiquons d'autres expressions de l'accélération ; nous avons trouvé pour projection de l'accélération sur le rayon vecteur $r'' - r\theta'^2$, le sens positif étant celui de OM. Donc :

$$\gamma = r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2 r}{dt^2}. \qquad \text{(V)}$$

C'est d'ailleurs sous cette forme que Clairault (*Théorie de la lune*, page 2, 1752) et Euler (*Novi. comment. Petrop.* 1753) avaient fait connaître presque en même temps l'expression de l'accélération.

Eliminons θ entre la relation (V) et $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$. Nous avons :

$$\gamma = \frac{C^2}{r^3} - \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Hosted by Google

l'accélération est ainsi connue si on donne la constante des aires et la variation du rayon vecteur avec le temps.

Eliminons t entre la relation (V) et $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$; nous obtenons :

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^3}$$

ensuite

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$$

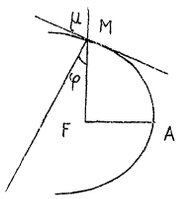
$$\frac{d^2r}{dt^2} = -C\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}$$

d'où

$$\gamma = \frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] \quad \text{(VI)}$$

Cette formule, due à Binet, fait connaître l'accélération étant donné la constante des aires et la trajectoire. Telles sont, présentées dans l'ordre historique, les diverses formules relatives aux accélérations centrales.

4. Application au mouvement d'un point sur une conique, l'accélération étant constamment dirigée vers un foyer. — Nous prenons le foyer considéré pour pôle et pour axe polaire la droite qui va du foyer au sommet voisin ; la conique a pour équation



$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$$

En portant cette valeur de $\frac{1}{r}$ dans la formule de Binet, on trouve :

$$\gamma = \frac{C^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}$$

Hosted by Google

Ainsi l'*accélération est inversement proportionnelle au carré du rayon vecteur.*

La formule (IV) de Moivre, où pour éviter une confusion nous désignons par p' la distance du foyer à la vitesse, donne :

$$R = \frac{C^2}{p'^3} \cdot \frac{r}{\gamma} = p \cdot \frac{r^3}{p'^3} = \frac{p}{\sin^3 \mu}$$

puisque

$$p' = r \sin \mu$$

Si on désigne par φ l'angle de la normale avec le rayon vecteur on a :

$$R = \frac{p}{\cos^3 \varphi}$$

D'autre part, la longueur de la normale, comprise entre le point d'incidence et l'axe est

$$N = \frac{p}{\cos \varphi}$$

On a enfin

$$R = \frac{N}{\cos^2 \varphi}$$

formule qui fournit une construction très simple du rayon de courbure de la conique. (Voir Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral,* tome I, page 336).

5. **Mouvement d'un point sur une spirale logarithmique, l'accélération étant constamment dirigée vers le pôle.** — Soit : $r = e^{\frac{\theta}{a}}$ l'équation de la courbe. Appliquons la formule :

$$\gamma = \frac{C^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr}$$

on a

$$tg\mu = \frac{rd\theta}{dr} = a. \quad \text{et} \quad p = r \sin \mu = \frac{ra}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Hosted by Google

par suite

$$\gamma = \frac{C^2 (1 + a^2)}{a^2} \cdot \frac{1}{r^3}$$

L'accélération est inversement proportionnelle au cube du rayon vecteur. (Newton. *Principia* : proposition IV, probl. IV, page 45.)

Hosted by Google

LIVRE III

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

CHAPITRE PREMIER

DES MOUVEMENTS DE TRANSLATION ET DE ROTATION D'UN SOLIDE.

1. **Translation.** — On dit qu'un système invariable ou solide a un mouvement de translation, quand tous les points du système éprouvent, dans un intervalle de temps quelconque, des déplacements égaux, parallèles et de même sens.

Si on considère un intervalle Δt, on voit que les vitesses moyennes des points du solide sont des vecteurs égaux et, passant à la limite, on a ce théorème :

Si un solide a un mouvement de translation, à un instant quelconque les vitesses de tous les points sont égales.

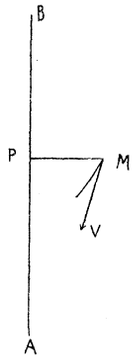
Réciproquement, si deux points quelconques A_1 (x_1, y_1, z_1) A_2 $(x_2 y_2 z_2)$ du système ont, à chaque instant, la même vitesse, le système est animé d'un mouvement de translation. En effet, des équations

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_2}{dt}$$

on déduit par intégration que $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, sont des constantes. Le segment A_1A_2 se déplace donc parallèlement à lui-même, d'où il résulte que les points A_1, A_2 éprouvent dans le même temps des déplacements égaux, parallèles et de même sens.

Hosted by Google

2. **Rotation.** — On dit qu'un solide a un mouvement de rotation si deux points A,B de ce solide sont fixes ; tous les points de la droite AB sont alors fixes ; cette droite est l'*axe de rotation.* Tout point M du système décrit un cercle ayant son plan perpendiculaire à l'axe et son centre sur l'axe ; sa vitesse est un vecteur MV normal au plan MAB dont le sens résulte de celui du mouvement ; sa valeur numérique est MP.ω, ω étant la vitesse angulaire. Cette vitesse angulaire est la même pour tous les points du corps ; si on considère, en effet, un autre point M_1 et qu'on désigne par θ et θ_1 les angles des plans méridiens ABM, ABM_1 avec un plan méridien fixe, on a

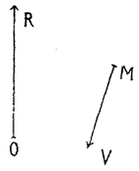


$$\theta - \theta_1 = \text{const}$$

d'où

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

3. **Représentation des rotations.** — Les vitesses des points d'un solide en rotation sont connues à l'époque t, si on connaît l'axe, le sens du mouvement et la vitesse angulaire. On donnera à la fois toutes ces conditions en représentant la rotation par un vecteur OR porté par l'axe, de longueur mesurée par ω, et ayant un sens tel que par rapport à ce vecteur le mouvement de rotation ait le sens direct, c'est-à-dire s'effectue de gauche à droite pour un observateur ayant les pieds à l'origine et la tête à l'extrémité du vecteur. Remarquons, d'ailleurs, que notre sens direct est le sens rétrograde en astronomie. Le mode de représentation précédent est dû à Poinsot (*Théorie nouvelle de la rotation des corps*, page 6, 1852). On voit sans peine que *la vitesse* MV *d'un*



Hosted by Google

point M *sera le moment du vecteur représentant la rotation par rapport à ce point.*

4. **Détermination analytique de la vitesse d'un point du corps.** — Les projections de la vitesse du point M(x,y,z) ne sont autre chose que celles du moment du vecteur OR par rapport au point M. Soit (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de l'origine de la rotation, p, q, r ses projections sur les axes de coordonnées rectangulaires ; on aura :

$$\begin{cases} V_x = (y_1 - y)\, r - (z_1 - z)\, q = l + qz - ry \\ V_y = (z_1 - z)\, p - (x_1 - x)\, r = m + rx - pz \\ V_z = (x_1 - x)\, q - (y_1 - y)\, p = n + py - qx \end{cases}$$

(l,m,n,p,q,r) étant les coordonnées du vecteur OR,

et si le point O est origine des coordonnées :

$$\begin{cases} V_x = qz - ry \\ V_y = rx - pz \\ V_z = py - qx \end{cases}$$

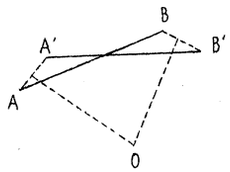
Remarque. — C'est à ces deux mouvements simples : translation et rotation, qu'on ramène le mouvement d'un corps solide. Nous commencerons par étudier un cas particulier, celui où un plan du solide glisse sur un plan fixe; ce mouvement revient évidemment à l'étude du mouvement d'une figure plane dans son plan.

Hosted by Google

CHAPITRE II

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

THÉORÈME I. — *Tout déplacement d'une figure plane dans son plan peut être produit par une rotation autour d'un point.*



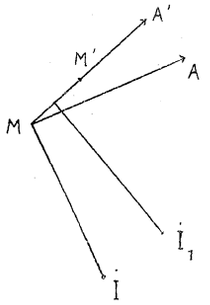
Deux points A et B, invariablement liés à la figure, suffisent pour en déterminer la position. Soit A'B' les positions de ces deux points dans une deuxième position de la figure. Le point A a éprouvé le déplacement AA', le point B le déplacement BB'. Les perpendiculaires à ces deux droites en leurs milieux se coupent en un point O et l'on voit aisément que les deux angles AOA' et BOB' sont égaux et de même sens. Si l'on conçoit que le plan lié à la figure mobile tourne autour du point O d'un angle égal à AOA', le point A décrira un arc de cercle et viendra en A', B décrira un autre arc de cercle et viendra en B'. La figure aura alors passé de sa première à sa seconde position. Si AA' et BB' étaient parallèles, O serait rejeté à l'infini ; la rotation deviendrait une translation.

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan, les vitesses des différents points de la figure, à un instant déterminé, sont les mêmes que si la figure tournait autour d'un certain point avec une vitesse angulaire déterminée.*

Soit M et M' les positions d'un même point de la figure aux époques t et $t + \Delta t$. On peut amener la figure de sa première position à la seconde en la faisant tourner autour d'un certain

Hosted by Google

point I_1 d'un angle déterminé α, et la perpendiculaire à MM′ en son milieu passe par I_1. Si Δt tend vers zéro, le point I_1 tend, en général, vers un point limite I.



La perpendiculaire en M à la vitesse MA du point M passera donc par I. En outre, soit v_1 la vitesse moyenne de M. On a

$$v_1 = \frac{MM'}{\Delta t}$$

$$= \frac{MM'}{\text{arc } MM'} \cdot \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} = \frac{MM'}{\text{arc } MM'} \cdot \frac{\alpha}{\Delta t} \cdot I_1M$$

Si on désigne ω la limite de $\frac{\alpha}{\Delta t}$ et par v la vitesse du point M, on aura en passant à la limite :

$$v = \omega . \dot{I}M.$$

La vitesse du point M est donc la même que si la figure tournait autour du point $\dot{I}$ avec la vitesse de rotation ω indépendante du point M.

Le point $\dot{I}$ est appelé *centre instantané de rotation* relatif à l'instant t.

Il résulte de ce qui précède, que les normales aux trajectoires des différents points de la figure mobile menées pour chaque position de la figure concourent au centre instantané. De cette remarque, on déduit un procédé très simple pour le tracé des tangentes à certaines courbes.

THÉORÈME III. — *Si on considère l'enveloppe d'une ligne tracée dans le plan de la figure mobile, la normale commune à l'enveloppe et à l'enveloppée menée en chaque point où ces deux courbes se touchent passe à chaque instant par le centre instantané correspondant.*

En effet, le point de contact M, quand le temps varie, se déplace sur la courbe mobile C ; celle-ci peut donc être considérée comme la trajectoire relative du point M, l'enveloppe E étant la

Hosted by Google

trajectoire absolue. La vitesse absolue et la vitesse relative du point M se trouvent dès lors portées à chaque instant sur la tangente commune en M aux deux courbes ; il en est, par suite, de même de la vitesse d'entraînement du point M ; or, la normale en M à la vitesse d'entraînement va passer par le centre instantané $\dot{I}$ et le théorème est établi.

La vitesse d'entraînement du point M n'est pas constamment nulle, car elle est égale à $\omega\,\dot{I}M$; D'autre part, si s et s' sont les arcs de C et E compris entre le point M et une origine fixe prise sur chaque courbe, la vitesse absolue et la vitesse relative, sont :

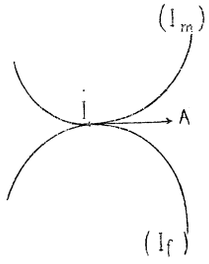
$$\frac{ds'}{dt} \text{ et } \frac{ds}{dt}$$

On a donc en choisissant convenablement les sens positifs sur les deux courbes :

$$\frac{ds'}{dt} - \frac{ds}{dt} = \omega\,\dot{I}M$$

La différence $s' - s$ sera variable avec t et il y a, en général, glissement de l'enveloppée sur l'enveloppe.

Théorème IV. — *Le mouvement d'une figure plane dans son plan peut être obtenu en faisant rouler sans glissement une courbe de la figure sur une courbe fixe.*



Le centre instantané de rotation I, relatif à l'époque t, décrit, quant t varie, une courbe (I_m) dans le plan de la figure mobile ; il décrit aussi une courbe (I_f) dans le plan fixe. On peut regarder (I_m) comme sa trajectoire relative, (I_f) étant alors sa trajectoire absolue. La vitesse d'entraînement du point I est nulle à chaque instant. Donc, la vitesse relative et la vitesse absolue du point I sont représentées par un même vecteur IA. Il en résulte d'abord que les deux courbes (I_m) et (I_f) sont tangentes au point $\dot{I}$; en outre, si s

Hosted by Google

et s' sont les arcs compris sur ces courbes entre le point I et des origines fixes. On aura :

$$\frac{ds'}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{\mathrm{I}}\mathrm{A}$$

d'où

$$s' - s = \text{const.}$$

Le point de contact décrit sur les deux courbes des arcs égaux, c'est-à-dire que (I_m) roule sur (I_f) sans glissement.

Les deux courbes (I_m) et (I_f) sont appelées les *roulantes*.

La courbe (I_m) est d'ailleurs la seule courbe du plan mobile qui roule sur son enveloppe, car, d'après l'égalité obtenue plus haut : $\frac{ds'}{dt} - \frac{ds}{dt} = \omega\,\mathrm{IM}$, si la courbe C roule sur son enveloppe, on doit avoir à chaque instant $\omega\,\mathrm{IM} = 0$, c'est-à dire $\mathrm{IM} = 0$ car ω n'est pas constamment nul ; le point M de la courbe C se confond donc avec le centre instantané I et celui-ci décrit dans le plan mobile la courbe C qui est par suite identique à $(\dot{\mathrm{I}}_m)$.

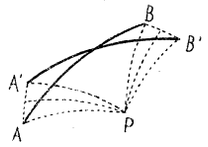
Hosted by Google

CHAPITRE III

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

1. Avant d'aborder l'étude du mouvement général d'un solide, nous traiterons le cas où un point du corps reste fixe. La position d'un solide est déterminée par celle de trois de ses points non situés en ligne droite ; si l'un de ces points est fixe, il suffit de connaître la position des deux autres. On peut supposer ceux-ci équidistants du point fixe, de telle sorte qu'ils restent pendant le mouvement sur une même sphère. Nous sommes ainsi ramenés à étudier le mouvement d'une figure sphérique sur sa sphère.

2. Théorème I. — *Tout déplacement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être produit par une rotation autour d'un axe passant par le point fixe.*

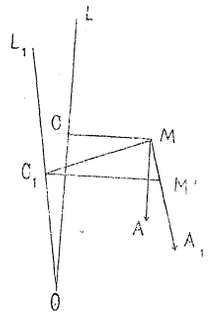


Sur une sphère de rayon arbitraire ayant pour centre le point fixe O, considérons deux points AB du solide dans sa première position. Soit A'B' les positions de ces points quand le solide a la deuxième position. L'arc de grand cercle AB s'est transporté en A'B'. Or, si l'on mène des arcs de grand cercle perpendiculaires en leurs milieux aux arcs de grand cercle AA', BB', ces arcs se coupent en un point P. Les deux triangles sphériques PAB, PA'B' ayant leurs trois côtés égaux, chacun à chacun sont égaux. Les angles APA', BPB' sont égaux et de même sens. Par suite, si on fait tourner le solide autour de OP, d'un angle égal à APA', A viendra en A', B en B', et le solide passera de la première à la seconde position.

Hosted by Google

En considérant un déplacement infiniment petit, nous allons obtenir le théorème suivant :

3. Théorème II. — *La distribution des vitesses dans un solide qui se meut, en ayant un point fixe, est la même à chaque instant que si le corps tournait autour d'un axe avec une vitesse angulaire déterminée.*



On peut amener le solide de sa position au temps t, à sa position au temps $t + \Delta t$ en le faisant tourner d'un angle α autour d'un axe OL_1. Si M' est à l'époque $t + \Delta t$ la position du point du solide qui est en M à l'époque t, le plan perpendiculaire à MM', en son milieu, passera par OL_1. Si Δt tend vers zéro. OL_1 a une position limite OL, MM' a pour direction limite la vitesse MA du point M à l'époque t. Donc, la vitesse du point M est normale au plan MOL ; en second lieu, soit v_1 la vitesse moyenne du point M. On a

$$v_1 = \frac{MM'}{\text{arc } MM'} \cdot \frac{\alpha}{\Delta t} \cdot C_1M$$

En passant à la limite et désignant par v la vitesse du point M, ω la limite de $\frac{\alpha}{\Delta t}$, et MC la distance de M à OL, on aura :

$$v = \omega . CM$$

Les vitesses sont donc les mêmes que si le solide tournait autour de OL dans un certain sens avec la vitesse angulaire ω.

4. L'axe OL est dit *axe instantané de rotation.* Sa découverte appartient à d'Alembert (*Recherches sur la précession des équinoxes*, p. 83. Paris 1749). Euler le découvrit aussi peu de temps après (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, p. 185 1750). Si on considère le lieu de l'axe instantané d'une part dans l'espace fixe, de l'autre dans le système mobile, on obtient deux cônes de même sommet (C_f) et (C_m). On voit, comme dans le cas d'une figure plane qu'on peut se représenter le mouvement du solide en

Hosted by Google

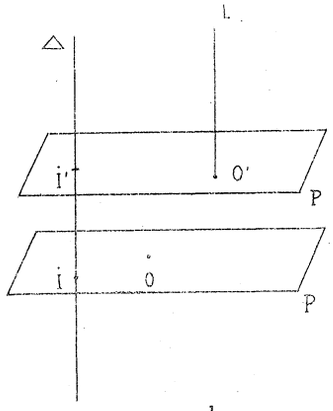
faisant rouler sans glissement le cône mobile sur le cône fixe en entendant par là que toute courbe tracée sur (C_m) roule sans glisser sur la courbe correspondante de (C_f). (Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, p. 16, 1852).

5. — Nous allons maintenant nous occuper du mouvement quelconque d'un solide.

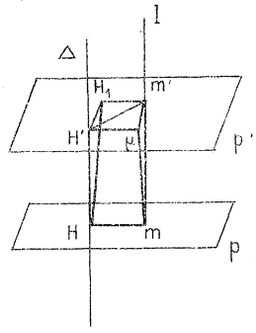
Théorème III. — *Tout déplacement d'un corps solide peut être produit par une translation et une rotation.*

Soit, dans deux positions successives S,S′ d'un corps solide, O et O′ les positions d'un même point O. Imprimons au solide un déplacement égal et parallèle à OO′ qui amènera O en O′ et S en Σ ; Σ et S′ ayant un point commun O′ une rotation autour d'un certain axe O′L amènera Σ en coïncidence avec S′.

6. — On voit ainsi qu'on peut amener S en S′ par une infinité de déplacements formés par une translation rectiligne T suivie d'une rotation R. A chaque point O du solide S correspond un tel déplacement et un seul que nous représenterons par le symbole (TR).



Il existe au moins un déplacement dans lequel la translation est parallèle à l'axe de rotation.



Menons les plans P et P′ passant respectivement par O et O′ et perpendiculaires à O′L, et soit F une figure invariablement liée à S et située dans le plan P ; quand S vient en S′, F vient en F′ ; tout déplacement amenant F sur F′ amènera évidemment S sur S′. Tout d'abord, F′ est dans le plan P′, car la translation OO′ amène F dans P′

Hosted by Google

et la rotation autour de O'L laisse F dans P'. Cela posé, imprimons à S' la translation T' normale au plan P, F prendra dans P' la position Φ ; une rotation R' d'amplitude θ effectuée autour d'un axe $\dot{I}\dot{I}'$ normal à P' amènera Φ en F'. On obtient ainsi un déplacement (T'R') dans lequel la translation est bien parallèle à l'axe de rotation.

Si on désigne par Δ la droite de S, qui coïncide avec $\dot{I}\dot{I}'$, le déplacement (T'R') correspond à tous les points de Δ.

Les rotations correspondant à tous les points du corps ont leurs axes parallèles et ont même amplitude et même sens.

Soit maintenant un point quelconque m de S; cherchons la rotation qui lui correspond ; soit p' le plan mené par m perpendiculairement à Δ et f une figure liée à S et située dans p. La translation T' amène p en p', H en H', m en μ et f dans le plan p'; la rotation R' laissera f dans p' et, par suite, f' position de f dans S' est dans le plan p'. Cela posé, employons maintenant le déplacement mm'; il amène H en H_1 et f en f_1. La rotation qui amènera f_1 sur f' est la rotation cherchée. Cette rotation a son axe $m'l$ normal à p' et, par suite, parallèle à Δ. En outre, elle doit amener H_1 en H'. Les deux angles $H_1m'H'$ et $\mu H'm'$ étant égaux et de même sens, la rotation autour de $m'l$ aura donc même sens et même amplitude que la rotation R'.

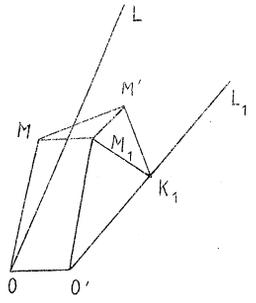
De ce qui précède, il résulte immédiatement que : *les translations T ont même projection sur la direction de* Δ. On voit de plus que si le point m est en dehors de Δ la translation et l'axe de rotation correspondants ne sont pas parallèles. Le déplacement (T'R') est donc le seul pour lequel il y a parallélisme entre la translation et l'axe de rotation, et la droite Δ est unique dans le solide S. On l'appelle *axe de rotation et de glissement.*

7. En considérant deux positions infiniment voisines d'un solide, nous allons déduire de ce qui précède des théorèmes relatifs à la distribution des vitesses dans un solide à un instant donné.

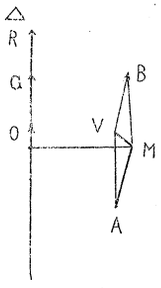
THÉORÈME IV. — *La vitesse d'un point quelconque d'un corps solide en mouvement, est à chaque instant la même que si le corps avait simultanément une translation de vitesse égale à celle d'un point arbitrairement choisi dans le corps et une rotation de vitesse angulaire déterminée autour d'un axe passant par ce point.*

Hosted by Google

Soit M et M′ les deux positions d'un point M du solide aux époques t et $t + \Delta t$, O un point arbitrairement choisi dans le solide, O′ sa position à l'époque $t + \Delta t$. On peut amener M en M′ en imprimant au solide une translation OO′ qui amène M en M_1 et ensuite une rotation d'angle α autour d'un certain axe $O'L_1$. Le vecteur MM′ est la résultante de MM_1 et M_1M'. Il en sera de même pour les quotients de ces vecteurs par Δt. Faisons tendre Δt vers zéro, $O'L_1$ tendra vers OL, le rapport $\frac{\alpha}{\Delta t}$ aura une limite ω, $\frac{MM'}{\Delta t}$ deviendra la vitesse de M, $\frac{MM_1}{\Delta t}$ aura pour limite la vitesse du point O, transportée en M, et enfin $\frac{M_1M'}{\Delta t}$ deviendra, d'après un raisonnement déjà fait la vitesse du point M dans un mouvement de rotation s'effectuant autour de OL avec la vitesse angulaire ω. La vitesse du point M sera donc la résultante de la vitesse qu'aurait ce point dans une translation du solide de vitesse égale à celle du point O, et de sa vitesse dans une rotation de vitesse angulaire ω autour de OL.



8. — D'après ce que nous savons sur le déplacement fini d'un solide, on voit que la valeur de ω est indépendante du point O et que la direction de OL est invariable. Il en résulte aussi que la vitesse d'un point quelconque M peut s'obtenir en composant une rotation d'axe Δ et de vitesse ω, avec une translation dont la vitesse est parallèle à Δ. L'axe Δ est dit *axe instantané de rotation et de glissement* ou encore *axe hélicoïdal.* Tous ses points ont une même vitesse dirigée suivant Δ et plus petite que celle de tout autre point du corps. D'après Chasles, cet axe est mentionné dans un ouvrage d'un

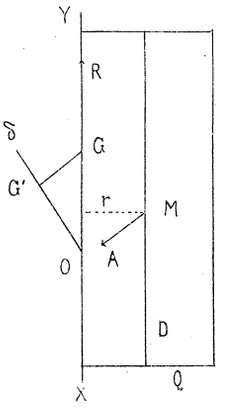


Hosted by Google

géomètre florentin Giulio Mozzi (1763).

Soit OR le vecteur qui représente la rotation s'effectuant autour de Δ, OG celui qui représente la vitesse de translation parallèle à Δ, on obtiendra la vitesse MV d'un point quelconque M du solide en prenant le moment MA de OR par rapport au point M, et le composant avec le vecteur MB égal et parallèle à OG. On se fait ainsi une idée très simple de l'état des vitesses de tous les points du solide à un instant donné. Grâce à ce mode de représentation, nous allons pouvoir pousser plus avant l'étude de ces vitesses.

9. Théorème. — *Le lieu des points dont la vitesse a une direction donnée est une droite parallèle à l'axe instantané de rotation et de glissement.*



Soit Oδ la parallèle à la direction donnée menée par un point de l'axe instantané XY et G' le point de Oδ qui se projette sur l'extrémité G de la vitesse de translation OG. Les points cherchés M seront ceux dont la vitesse MA, due à la rotation, est un vecteur égal, parallèle à GG' et de même sens. MA étant perpendiculaire au plan XYM, les points du lieu seront dans le plan Q mené par XY perpendiculairement au plan de XY et de $o\delta$; en outre, si r est leur distance à XY, on aura $r\omega = GG'$ et, par suite, cette distance est constante ; si on tient compte que la composante MA doit aussi avoir le sens GG', on voit que les points cherchés sont sur une seule parallèle D à XY.

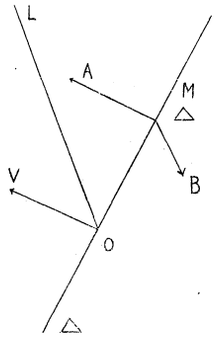
Corollaire. — *Il y a dans tout plan lié au solide un point et un seul dont la vitesse soit normale au plan.*

Les points dont la vitesse est parallèle à la normale au plan P sont situés sur une droite D qui, par son intersection avec P, donne le point unique F de P dont la vitesse soit normale à ce plan. Nous supposons, bien entendu, le plan P non parallèle à XY. Si P était parallèle à l'axe instantané, la droite D serait rejetée à l'infini et le point F irait à l'infini.

Hosted by Google

Le point F s'appelle le *foyer* ou encore le *pôle* du plan P ; le plan P se nomme le *plan focal* ou le plan *polaire* du point F. A tout point du solide correspond un seul plan polaire qui est le plan mené par ce point perpendiculairement à sa vitesse. En particulier le plan polaire d'un point de l'axe instantané est normal à cet axe.

10. Théorème. — *Si une droite est normale à la vitesse d'un de ses points elle est normale aux vitesses de tous les autres.*



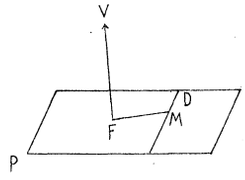
Soit une droite Δ normale à la vitesse OV d'un de ses points O et M un point quelconque de cette droite.

La vitesse du point M s'obtient en composant le vecteur MA égal et parallèle à OV avec la vitesse MB qu'aurait le point M dans une rotation d'axe OL. Les deux vecteurs MA et MB étant normaux à Δ, la vitesse de M sera aussi normale à Δ.

En vue d'abréviation, nous désignerons souvent, dans la suite, sous le nom de droites Δ les droites du solide qui sont normales aux vitesses de tous leurs points. Le théorème suivant est évident :

Pour tout point du solide, il passe une infinité de droites normales aux vitesses de tous leurs points ; elles sont situées dans le plan polaire du point.

Nous allons établir son corrélatif : *Dans tout plan du solide, il y a une infinité de droites normales aux vitesses de leurs points ; elles passent par le pôle du plan.* Soit le plan P de foyer F ; la vitesse FV de F étant, normale à P toutes les droites de P passant par F seront des droites Δ ; il n'y en a pas d'autres ; soit, en effet, D une droite ne passant pas par F ; elle ne peut être normale aux vitesses de tous ses



Hosted by Google

points ; sans cela, M étant un point quelconque pris sur D sa vitesse normale à la fois à FM et à D le serait au plan P. Celui-ci aurait alors une infinité de foyers, ce qui est impossible.

THÉORÈME. — *Les plans polaires des points d'un plan passent par le pôle de ce plan.*

Soit un plan P de pôle F, et F′ un point quelconque de P ; la droite FF′ située dans P et passant par son foyer F sera une droite Δ ; elle est, par suite, contenue dans le plan polaire P′ du point F′ et P′ passe bien par F.

On peut donner à ce théorème cet autre énoncé : *Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'un plan passent par un même point du plan.*

THÉORÈME CORRÉLATIF. — *Les pôles des plans passant par un point sont situés dans le plan polaire de ce point.*

Soit un point F de plan polaire P et P′ un plan quelconque passant par F. Désignons par F′ le foyer de P′. La trace de P′ sur P est une droite Δ puisqu'elle est dans P et passe par F ; étant dans P′ elle passera par F′ et, par suite, F′ est bien dans P.

11. — Le théorème précédent et son corrélatif sont identiques aux théorèmes relatifs aux pôles et plans polaires des quadriques. De même que dans la théorie des quadriques, nous allons, en nous servant de ces théorèmes, arriver à la notion de droites conjuguées.

THÉORÈME. — *Les plans polaires des points d'une droite* D *passent par une droite* D′ *qui est aussi le lieu des pôles des plans passant par* D.

Désignons par P_1 et P_2 deux plans arbitraires déterminés passant par D ayant pour pôles F_1 et F_2. Soit F un point quelconque de la droite D ; F étant à la fois dans P_1 et P_2 son plan polaire P passera par F_1 et F_2. Ainsi, les plans polaires de tous les points de D passent par la droite D′ qui joint F_1 et F_2. On voit, de plus, que D′ contiendra les foyers de tous les plans passant par D, ce qui montre que D correspond à D′ comme D′ à D.

Les deux droites D et D′, entre lesquelles il y a réciprocité, sont dites *droites conjuguées*.

En revenant au langage de la cinématique, le théorème précédent peut s'énoncer en partie sous la forme suivante :

Hosted by Google

Les plans normaux aux vitesses de tous les points d'une droite passent par une même droite..

Remarque. — Si D et D′ sont conjuguées, le plan polaire d'un point F de D sera le plan FD′ et le pôle d'un plan P, passant par D, sera le point où D′ rencontre P. Il suit de là que si D et D′ sont distinctes, elles ne se coupent pas ; sans cela, en effet, tous les points de D, par exemple, auraient même plan polaire le plan DD′ et ce plan, admettrait une infinité de pôles.

Nous nous bornerons à énoncer les deux théorèmes suivants faciles à établir :

1° *Toute droite normale aux vitesses de ses points est sa propre conjuguée et réciproquement*;

2° *Toute droite portant la vitesse d'un point du solide est perpendiculaire à sa conjuguée et réciproquement si une droite est perpendiculaire à sa conjuguée, elle porte la vitesse d'un seul point du solide.*

12. Théorème. — *Toute droite rencontrant deux droites conjuguées est normale aux vitesses de ses points et réciproquement toute droite normale aux vitesses de ses points rencontrant une droite donnée rencontre la conjuguée.*

Soit une droite rencontrant en F et F′ deux droites conjuguées D et D′. Le plan F a pour plan polaire FD′ ; FF′ étant dans ce plan et passant par son pôle F est donc une droite Δ.

Réciproquement soit une droite Δ rencontrant D en F ; elle est dans le plan polaire de F, c'est-à-dire dans le plan FD′ et, par suite, rencontre D′

Corollaire. — *Deux couples quelconques de droites conjuguées sont des génératrices de même système d'une quadrique réglée.*

Soit, en effet, DD′ et $D_1D'_1$ les deux couples ; d'après le théorème précédent et sa réciproque, toutes les droites s'appuyant sur D, D′, D_1 rencontreront D'_1

13. Théorème. — *Deux droites conjuguées et l'axe instantané sont trois génératrices de même système d'une paraboloïde hyperbolique ayant son plan directeur normal à l'axe.*

Il suffit d'établir que tout plan P, normal à l'axe instantané XY en un point F coupe deux droites conjuguées D, D′ en deux points M et M′ tels que la droite MM′ passe par le point F. Or,

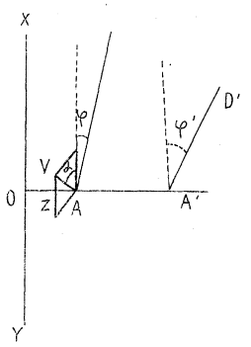
Hosted by Google

cette droite MM′, s'appuyant sur deux droites conjuguées, est une droite Δ; elle passe donc par le foyer de P, c'est-à-dire par F. Il résulte de là que les trois droites XY, D, D′ sont parallèles à un même plan ; donc, quand FM deviendra perpendiculaire à D, étant perpendiculaire à D et XY, elle le sera à D′. Ainsi :

La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées rencontre normalement l'axe instantané.

Partant de là, Chasles a indiqué le moyen de construire l'axe instantané connaissant à l'instant considéré les vitesses de trois points du corps. Soit *a, b, c* les trois points, les plans menés en *a* et *b* perpendiculairement aux vitesses de ces points se couperont suivant une droite γ conjuguée de *a b*. On mènera la perpendiculaire commune γ′ *à* γ et *ab*. De même, on déterminera la droite analogue β′ relative, par exemple, aux deux points *a* et *c*. La perpendiculaire commune à γ′ et β′ sera l'axe instantané.

14. **Relation entre les distances de deux droites conjuguées à l'axe instantané et leurs angles avec cet axe.** — Soit AA′ la perpendiculaire commune aux deux droites conjuguées D, D′, laquelle rencontre en O l'axe instantané XY. Désignons par r la distance OA de la droite D et de l'axe, par φ leur angle aigu ; soit r' et φ′ les quantités analogues pour D′. Le plan polaire du point A est A D′, il fait avec l'axe l'angle φ′; mais il est normal à la vitesse A V du point A; φ′ est donc complémentaire de l'angle α que fait cette vitesse avec l'axe. Or, en désignant par ω la rotation, par g la vitesse de translation, on a



$$tg\,\alpha = \frac{r\omega}{g} \quad \text{d'où } tg\varphi' = \frac{g}{r\omega}$$

On a de même

$$tg\,\varphi = \frac{g}{r'\omega}$$

Hosted by Google

et par suite

$$\frac{tg\,\varphi}{r} = \frac{tg\,\varphi'}{r'}$$

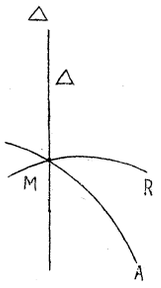
15. *La caractéristique d'une surface liée au corps solide est le lieu des points de la surface dont la vitesse d'entraînement est tangente à la surface.*

Soit Σ_1 l'enveloppe d'une surface Σ liée au solide, et c la caractéristique de Σ, c'est-à-dire la courbe suivant, laquelle les surfaces Σ et Σ_1 se raccordent à un instant donné. Prenons un point M sur la courbe c et traçons sur Σ une courbe γ passant par M et différente de la caractéristique. Le point commun à γ et à la caractéristique, a pour trajectoire relative γ quand le temps varie; il a pour trajectoire absolue une courbe γ_1 de Σ_1 passant par M. Quand ce point est en M, sa vitesse absolue et sa vitesse relative sont dans le plan tangent à Σ en M. Donc, la vitesse d'entraînement du point M sera tangente à Σ et la courbe c est le lien des points de cette surface dont la vitesse résultant du mouvement du solide touche Σ.

La normale en M à Σ sera visiblement une droite perpendiculaire aux vitesses de tous ses points.

Considérons en particulier un plan P de pôle F; soit M un point de sa caractéristique; la vitesse de M étant située dans le plan P, le plan polaire du point M sera normal au point P et, par suite, passera par la vitesse F V du point F. Donc :

La caractéristique d'un plan est la droite conjuguée de la normale, au plan menée par son foyer.



16. Considérons maintenant le mouvement continu d'un solide S et cherchons à généraliser la notion des roulantes et des cônes roulants.

Soit Δ l'axe instantané de rotation et de glissement relatif à l'instant t. Il engendre dans l'espace fixe une surface réglée que nous désignerons par (Δ_f) et dans le solide une deuxième surface réglée (Δ_m).

Nous allons démontrer que : *Les surfaces* $(\Delta_m$ *et* (Δ_f) *se raccordent à chaque instant le long de l'axe instantané* Δ.

Hosted by Google

En effet, soit M un point quelconque de l'axe instantané Δ relatif à l'époque t et MR une courbe arbitraire tracée sur (Δ_m). Le point commun à MR et à l'axe instantané a pour trajectoire relative MR et pour trajectoire absolue une certaine courbe MA tracée sur (Δ_f). Soit V_a et V_r les vitesses absolues et relatives de ce point à l'instant t. Le plan tangent en M à (Δ_f) est le plan ΔV_a, et le plan tangent, à (Δ_m) est ΔV_r Ces deux plans coïncident, car la vitesse d'entraînement du point M est dirigée suivant Δ et, de plus, les trois vitesses sont dans un même plan. (Δ_m) et (Δ_f) ont donc même plan tangent en tous les points de Δ.

On dit de la surface (Δ_m) qu'elle *vire* sur (Δ_f).

Cherchons à quelles conditions une courbe C′, tracée sur (Δ_m), aura une enveloppe C tracée sur (Δ_f). Le point de contact M de ces courbes à l'instant t étant commun aux deux surfaces virantes est sur Δ et on peut regarder C′ et C comme les trajectoires relative et absolue de ce point. Les vitesses absolue et relative de M ont même direction, celle de la tangente commune aux deux courbes, ce qui exige que la vitesse d'entraînement du point M soit nulle ou dirigée suivant cette tangente.

1° Si la vitesse d'entraînement du point M n'est pas constamment nulle, cette vitesse, et par suite Δ est tangente aux deux courbes. Par suite : *Les surfaces virantes sont des surfaces développables ayant pour arêtes de rebroussement C et C′.* On voit, en outre, que C′ est la seule courbe de (Δ_m) qui enveloppe une courbe située sur (Δ_f). D'ailleurs, il y aura glissement de C′ sur son enveloppe C, car si s et s' sont les arcs de ces courbes compris entre le point M et des origines fixes la différence $\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt}$ n'est pas constamment nulle.

2° Si la vitesse d'entraînement du point M est constamment nulle, il en est de même pour tous les points de Δ et, à chaque instant, le mouvement se réduit à une rotation. Soit alors une courbe quelconque γ' tracée sur (Δ_m). Son point d'intersection μ avec Δ décrit sur (Δ_f) une certaine courbe γ. La vitesse d'entraînement du point μ étant nulle, ses vitesses absolue et relative sont égales ; il en résulte d'abord que γ' enveloppe γ et ensuite que γ' roule sur γ sans glissement puisque $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma'}{dt}$, σ et σ' étant

Hosted by Google

des arcs de ces deux courbes compris entre des origines fixes et le point μ. Donc : *Si, à chaque instant, le mouvement du solide se réduit à une rotation, une courbe quelconque de* (Δ_m) *roule sans glisser sur une certaine courbe de* (Δ_f).

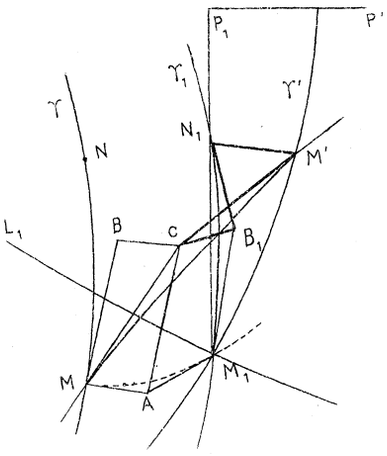
Nous venons, par ce qui précède, d'indiquer un moyen de faire correspondre à toute courbe γ' de (Δ_m) une courbe γ de Δ_f de telle manière que deux arcs correspondants aient même longueur. En d'autres termes : *Les surfaces virantes sont applicables l'une sur l'autre quand, à chaque instant, le mouvement se réduit à une rotation.*

Hosted by Google

CHAPITRE IV

COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS.

1. Considérons un point M en mouvement dans un solide S, celui-ci se déplaçant à son tour dans un système fixe. Nous nous proposons de trouver l'accélération absolue du point M. Soit γ et γ' les positions de la trajectoire relative aux instants t et $t + \Delta t$. Le point mobile est en M et M' aux instants t et $t + \Delta t$; enfin, soit M_1 la position à l'instant $t + \Delta t$ du point μ de S qui coïncide avec M à l'époque t.



On peut amener le solide à sa deuxième position, par une translation MM_1 qui transporte γ en γ_1 suivie d'une rotation (R) d'angle θ autour d'un axe $M_1 L_1$ qui amène γ_1 en γ' et le point N_1 de γ_1 en M'.

Désignant par V_r, V_e, V_a les vitesses relatives, d'entraînement et absolue du point M, prenons sur la tangente en M à γ $MB = V_r \Delta t$ et sur la tangente en M à la trajectoire du point μ $MA = V_e \Delta t$.

La résultante MC de ces deux vecteurs sera tangente à la trajectoire absolue et égale à $V_a \Delta t$.

La déviation absolue dans l'intervalle Δt est donc CM'; nous aurons l'accélération absolue en cherchant la limite de $2 \frac{CM'}{\Delta t^2}$.

Or, $M_1 B_1$ étant mené égal à MB, parallèle et de même sens, le vecteur CM'' est la résultante de CB_1, $B_1 N_1$, et $N_1 M'$. Par suite,

$2\,\frac{CM'}{\Delta t^2}$ est la résultante des vecteurs $2\,\frac{CB_1}{\Delta t^2}$, $2\,\frac{B_1N_1}{\Delta t^2}$, $2\,\frac{N_1M''}{\Delta t^2}$.

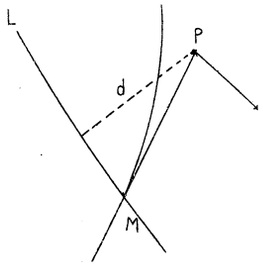
Le premier a même limite que $2\,\frac{AM_1}{\Delta t^2}$ c'est-à-dire l'accélération du point μ ou *accélération d'entraînement*; AM_1 est, en effet, la déviation dans le mouvement d'entraînement.

Le deuxième a pour limite l'accélération relative, car B_1N_1 est la déviation relative.

Cherchons, maintenant, la limite du vecteur $\frac{N_1M'}{\Delta t^2}$.

Soit $M_1P_1 = \frac{M_1N_1}{\Delta t}$ de sorte que P_1 est l'extrémité de la vitesse relative moyenne; la rotation (R) amène P_1 en P', et l'on a

$$P_1P' = \frac{N_1M'}{\Delta t}$$



$\frac{N_1M'}{\Delta t^2}$ et $\frac{P_1P'}{\Delta t}$ auront donc, à la limite, même grandeur, direction et sens.

Quand Δt tend vers zéro, M_1L_1 devient l'axe instantané ML issu du point M; P_1 a pour limite l'extrémité P de la vitesse relative; $\frac{P_1P'}{\Delta t}$ deviendra un vecteur perpendiculaire au plan MLP au point P et du côté vers lequel s'effectue la rotation; il nous reste à obtenir la limite de la longueur de $\frac{P_1P'}{\Delta t}$. On a

$$P_1P' = 2d_1 \sin\frac{\theta}{2}$$

d_1 désignant la distance du point P_1 à l'axe M_1L_1

$$\frac{P_1P'}{\Delta t} = d_1\,\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\cdot\frac{\theta}{\Delta t}$$

Hosted by Google

La limite de $\frac{P_1P'}{\Delta t}$ est donc $d\omega$, d étant la distance de P à l'axe ML et ω la vitesse angulaire à l'instant t.

La troisième composante de l'accélération absolue sera donc le double de la vitesse du point P dans la rotation de vitesse ω autour de ML ou encore le double du moment par rapport au point P du vecteur issu de M et représentant la rotation instantanée.

Donc : *L'accélération absolue est la somme géométrique de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement, et d'un troisième vecteur qui est le double du moment de la rotation instantanée issue du point considéré par rapport à l'extrémité de la vitesse relative.*

2. Cette accélération complémentaire a été appelée par Coriolis, *accélération centrifuge composée* et est désignée souvent par le nom même de Coriolis.

L'accélération de Coriolis est nulle.

1° Pour $\omega = 0$. Le mouvement d'entraînement se réduit à l'instant t à une translation.

2° Pour $V_r = 0$. A l'instant considéré, le point est au repos par rapport au solide entraîné.

3° pour P situé sur ML ; la vitesse relative est alors parallèle à l'axe instantané du mouvement d'entraînement.

Hosted by Google

Hosted by Google

LIVRE IV

ÉTUDE ANALYTIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE ANALYTIQUE DU MOUVEMEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

---

1. **Centre instantané.** — Soit M un point quelconque du plan mobile (x,y) ses coordonnées rectangulaires absolues, (X,Y) ses coordonnées rectangulaires relatives, (a,b) les coordonnées absolues de l'origine des axes mobiles, α l'angle de l'axe des x avec l'axe des X.

On a :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

d'où on tire en posant $\omega = \dfrac{d\alpha}{dt}$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{da}{dt} - \omega\,(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) = \dfrac{da}{dt} - \omega\,(y - b) \\ \dfrac{dy}{at} = \dfrac{db}{dt} + \omega\,(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) = \dfrac{db}{dt} + \omega\,(x - a) \end{cases}$$

Le point I, dont les coordonnées absolues $(x_1 y_1)$, satisfont aux

Hosted by Google

relations :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} - \omega\,(y_1 - b) = 0 \\ \dfrac{db}{dt} + \omega\,(x_1 - a) = 0 \end{cases}$$

sera donc immobile à l'instant t. En introduisant (x_1, y_1) les équations (2) s'écrivent :

$$(2')\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\,\omega\,(y - y_1) \\ \dfrac{dy}{dt} = \quad\ \omega\,(x - x_1) \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit que. *La vitesse de tout point* M *du plan mobile est la même que si ce plan tournait autour du point* I *avec la vitesse angulaire* ω. Nous retrouvons ainsi le centre instantané de rotation relatif à l'instant t.

Les coordonnées absolues du centre instantané sont :

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = a - \dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{db}{dt} \\ y_1 = b + \dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{da}{dt} \end{cases}$$

et ses coordonnées relatives :

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1 = -\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{db}{dt}.\cos\alpha - \dfrac{da}{dt}\sin\alpha\right) = -\dfrac{\eta}{\omega} \\ Y_1 = \quad\ \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{da}{dt}.\cos\alpha + \dfrac{db}{dt}\sin\alpha\right) = \quad\ \dfrac{\xi}{\omega} \end{cases}$$

On voit que $(\xi\eta)$ sont les projections sur les axes mobiles OX, OY de la vitesse de l'origine O de ces axes.

On obtient la courbe (I_m) en éliminant le paramètre t entre les équations (5) et la courbe (I_f) en éliminant ce paramètre entre les équations (4).

Hosted by Google

2. Accélération d'un point du plan mobile. — Des formules (2′), on déduit par différentiation et en remplaçant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs expressions (2′)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}\left(y - y_1\right) - \omega\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)$$
$$= -\frac{d\omega}{dt}\left(y - y_1\right) - \omega^2\left(x - x_1\right) + \omega\frac{dy_1}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}\left(x - x_1\right) + \omega\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)$$
$$= \frac{d\omega}{dt}\left(x - x_1\right) - \omega^2\left(y - y_1\right) - \omega\frac{dx_1}{dt}$$

Portons au centre instantané l'origine des coordonnées et prenons pour axe des x la tangente commune aux roulantes dans le sens du mouvement du point de contact, l'axe des y étant la normale commune à ces courbes faisant avec Ix un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif de rotation. En désignant par V la vitesse avec laquelle le centre instantané se déplace sur les deux courbes, on aura :

$$x_1 = y_1 = 0 \quad \frac{dx_1}{dt} = \mathrm{V} \quad \frac{dy_1}{dt} = 0$$

et les précédentes formules deviennent :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -y\dfrac{d\omega}{dt} - \omega^2 x \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x\dfrac{d\omega}{dt} - \omega^2 y - \omega\mathrm{V} \end{cases}$$

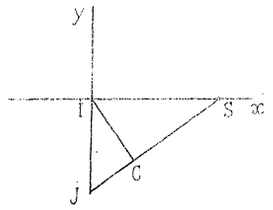
En particulier on a pour le centre instantané :
$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega\mathrm{V}$

Hosted by Google

3. **Centre des accélérations.** — D'après les formules (6), le point commun aux deux droites :

$$\begin{cases} \omega^2 x + y \dfrac{d\omega}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\omega}{dt} x - \omega^2 y = \omega V \end{cases}$$

une accélération nulle. On obtiendra ce point C en prenant sur I_x et I_y les deux points S et J tels que



$$IS = \frac{\omega V}{\dfrac{d\omega}{dt}}, \quad IJ = -\frac{V}{\omega}$$

et projetant le centre instantané I sur la droite J S.

Si on transporte les axes de coordonnées en ce point, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -y \dfrac{d\omega}{dt} - \omega^2 x \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \quad x \dfrac{d\omega}{dt} - \omega^2 y \end{cases}$$

Ce qui montre que : *Au point de vue des accélérations, tout se passe comme si le plan mobile tournait autour du point d'accélération nulle avec la vitesse angulaire variable* ω. Le point C est dit *centre des accélérations*.

Si ω est constant, le centre des accélérations est le point J. Le point J est appelé *centre géométrique des accélérations*.

En voici la raison : quand on ne considère le mouvement qu'au point de vue géométrique, en faisant abstraction de la loi du temps, on peut choisir la loi la plus simple, c'est-à-dire supposer ω constant.

I J étant égal à $-\dfrac{V}{\omega}$ le point J ne dépend pas de la loi du temps ; mais le point C en dépend. L'angle I C J étant droit, on voit que : *Quand la loi du temps varie, le centre des accélérations décrit le cercle ayant* I J *pour diamètre*.

Nous verrons plus loin une autre signification de ce cercle.

Hosted by Google

4. **Composante normale de l'accélération.** — Soit (r,θ) les coordonnées polaires d'un point quelconque M du plan mobile, I étant le pôle et Ix l'axe polaire. La composante normale de l'accélération du point M a pour expression

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta = -\omega^2 r - \omega V \sin\theta$$

d'après les formules (6).

L'accélération normale est nulle si on a

$$\omega r + V\sin\theta = 0$$

ou

$$\omega(x^2 + y^2) + Vy = 0$$

Cette équation représente le cercle de diamètre IJ. Mais d'autre part R étant le rayon de courbure en M de la trajectoire de ce point, l'accélération normale a pour expression : $\frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 r^2}{R}$; si cette accélération est nulle R est infini et le point M est d'inflexion pour sa trajectoire.

Ainsi : *Le lieu des points du plan mobile qui sont à l'instant considéré des points d'inflexion de leur trajectoire est le cercle décrit sur* I J *comme diamètre*. Ce cercle est appelé *cercle des inflexions*.

Les calculs précédents supposent essentiellement $r \neq 0$. On se rend compte facilement que le point du plan mobile qui, à l'instant t, coïncide avec le centre instantané, bien que situé sur les cercles des inflexions, n'est pas pour sa trajectoire un point d'inflexion. C'est un point de rebroussement où la tangente est Iy.

5. **Composante tangentielle de l'accélération.** — En appliquant les formules (6) on voit que l'accélération du point M a pour projection sur la tangente à la trajectoire du point M.

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) = r\frac{d\omega}{dt} - \omega V\cos\theta$$

Hosted by Google

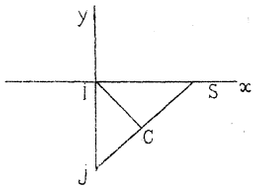
Cette composante est nulle si

$$r\frac{d\omega}{dt} - \omega V \cos\theta = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)\frac{d\omega}{dt} - \omega V x = 0$$

Le lieu des points du plan mobile dont l'accélération tangentielle est nulle à l'instant t *est donc le cercle de diamètre* I S.

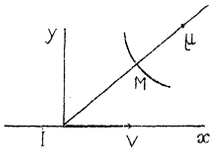


Nous avons implicitement supposé $r \neq 0$. Le point de la figure qui coïncide avec I à l'instant t a son accélération dirigée suivant Iy et mesurée par $-\omega V$. Sa trajectoire a un rebroussement en I où la tangente est Iy.

Pour ce point particulier, c'est l'accélération normale et non l'accélération tangentielle qui est nulle.

Remarquons que le cercle précédent et le cercle des inflexions ont pour points communs le centre instantané et le centre des accélérations.

6. **Formule de Savary.** — Soit un point M du plan mobile de coordonnées polaires (r,θ) I étant pôle et Ix axe polaire ; le centre de courbure μ de la trajectoire du point M est sur IM ; désignons par (ρ,θ) ses coordonnées polaires. Il existe entre r, ρ, θ une relation remarquable que nous allons établir.



La projection de l'accélération du point M sur la normale IM, le sens de I en M étant le sens positif a pour mesure.

$$-\omega^2 r - \omega V \sin\theta$$

comme nous l'avons vu au numéro 4.

Hosted by Google

D'autre part, R désignant la mesure algébrique du rayon de courbure $M\mu$, l'accélération normale a aussi pour expression $\frac{r^2\omega^2}{R}$.

On a donc :

$$\frac{\omega^2 r^2}{R} = -\omega^2 r - \omega V \sin\theta$$

ou en remplaçant R par $\rho - r$

$$\frac{r^2}{\rho - r} = -r - \frac{V \sin\theta}{\omega} \text{ ou } \frac{\rho r}{r - \rho} = \frac{V \sin\theta}{\omega}$$

et enfin

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{V \sin\theta}$$

Cette formule célèbre, due à Euler, est connue sous le nom de *formule de Savary*.

Le rapport $\frac{\omega}{V}$ qui figure dans cette formule s'exprime simplement à l'aide des rayons de courbure des roulantes.

Considérons I comme ayant (I_m) et (I_f) pour trajectoires relative et absolue, appliquons à ce point la règle de composition des accélérations et projetons sur Iy.

Soit R_f et R_m les coordonnées des centres de courbure des roulantes au point I, de telle sorte que R_f et R_m sont des rayons de courbure affectés d'un signe.

La projection de l'accélération absolue du point I sur Iy est $\frac{V^2}{R_f}$.

Celle de l'accélération relative est de même $\frac{V^2}{R_m}$

L'accélération d'entraînement du point I est dirigée suivant Iy et a pour mesure $-\omega V$.

Enfin, l'accélération de Coriolis est le double de la vitesse du point V dans la rotation instantanée autour du point I ; elle est parallèle à Iy et a pour mesure $2V\omega$.

On a donc :

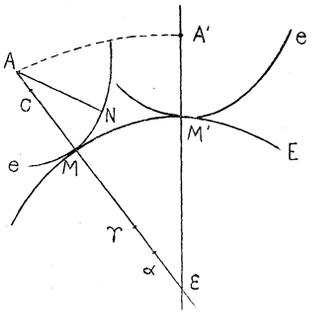
$$\frac{V^2}{R_f} = \frac{V^2}{R_m} - \omega V + 2\omega V$$

Hosted by Google

d'où on tire

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} \quad (7)$$

7. **Centre de courbure d'une enveloppe.** — Soient e la position d'une courbe du plan mobile au temps t, M un point où elle touche son enveloppe E et C et γ les centres de courbure respectifs de e et de E. Considérons un point A infiniment voisin de C pris sur la normale MC il passe par A une deuxième normale AN infiniment voisine de AM ; à une certaine époque $t + \Delta t$ l'enveloppée est en e', de manière que le point de contact M′ soit la position de N à cette époque $t + \Delta t$.



Désignons par α le centre de courbure en A de la trajectoire du point A ; soit enfin ε le point de rencontre des deux normales Mε et M′ε en A et A′ à la trajectoire du point A.

Si CA tend vers zéro, il en est de même de MM′ et par suite, de $\varepsilon\gamma$; en outre, l'angle MεM′ tendant vers zéro $\varepsilon\alpha$ tend aussi vers zéro. Donc, $\gamma\alpha$, qui est, selon les cas, la somme ou la différence de $\varepsilon\gamma$ et $\varepsilon\alpha$, tend vers zéro en même temps que CA. En d'autres termes :

Le centre de courbure de la trajectoire d'un point A, infiniment voisin de C, *sur la normale en* M, *est infiniment voisin du centre de courbure* γ *de l'enveloppe* E.

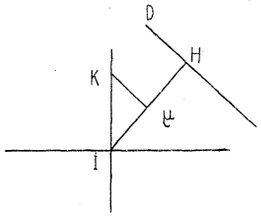
Si on fait venir le point A au point C, on voit que le centre de courbure de la trajectoire du point C est γ, centre de courbure de l'enveloppe E. D'où cet important théorème :

Le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe du plan mobile est le même que celui de la trajectoire du centre de courbure de l'enveloppée.

On ramène ainsi à la recherche du centre de courbure d'une trajectoire, celle du centre de courbure d'une enveloppe.

Hosted by Google

8. **Cercle des rebroussements.** — Cherchons d'après cela le centre de courbure μ de l'enveloppe d'une droite D du plan mobile. Il est situé sur la perpendiculaire IH à D. Le centre de courbure de D étant à l'infini sur IH, il faut faire dans la formule de Savary $r = \infty$. D'où



$$\rho = \frac{V}{\omega} \sin \theta$$

ou encore (xy) étant les coordonnées rectangulaires de μ

$$x^2 + y^2 - \frac{V}{\omega} y = 0$$

Le point μ est donc sur le cercle de diamètre IK, K étant par rapport à I le symétrique du centre géométrique J des accélérations. Par suite :

Le lieu des centres de courbure des enveloppes de droites relatif à un instant t *est le cercle symétrique du cercle des inflexions par rapport à la tangente aux roulantes.*

Ce nouveau cercle a été appelé *cercle des rebroussements*. En voici la raison : en tout point de rebroussement de première espèce le centre de courbure est confondu avec ce point et réciproquement. La droite D, qui touche en H son enveloppe sera tangente de rebroussement en H si μ coïncide avec H. On voit ainsi que le cercle précédent est le lieu des points de rebroussement des enveloppes de droites qui correspondent à l'instant considéré. En outre, les tangentes de rebroussement passent toutes par le point K.

9. *Remarque.* — Il y a donc à un instant donné une infinité de points situés sur un cercle qui sont d'inflexion pour leurs trajectoires, et une infinité de droites passant par un point qui sont de rebroussement pour leurs enveloppes.

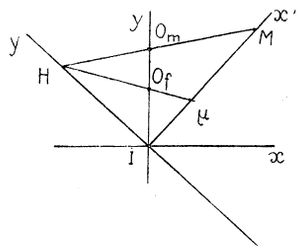
Mais il n'y a, en général, qu'un seul point qui soit de rebroussement pour sa trajectoire ; c'est celui qui, à l'instant considéré, coïncide avec le centre instantané. Pour qu'il y ait plusieurs points de cette nature, il faut que $\omega = 0$; à cet instant, toutes les

Hosted by Google

vitesses sont nulles, et tous les points du plan sont de rebroussement pour leurs trajectoires.

La relation $\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{\omega}{V}$ montre qu'alors $R_m = R_f$ et les roulantes ont un contact du second ordre.

10. **Construction du centre de courbure de la trajectoire d'un point.** – Soit M un point quelconque du plan mobile, μ le centre de courbure correspondant de sa trajectoire.



Euler a démontré que les droites MO_m, μO_f, O_m et O_f désignant les centres de courbure respectifs des roulantes (I_m) et (I_f), se coupent sur la perpendiculaire en I à IM (*Nouv. comm. de Saint-Pétersbourg*, 1766, t. XI, p. 209).

En effet, prenons de nouveaux axes de coordonnées rectangulaires, $Ix'y'$ l'axe des x' étant dirigé suivant IM.

Les droites MO_m et μO_f ont pour équations :

$$\frac{x'}{r} + \frac{y'}{h} = 1$$

$$\frac{x'}{\rho} + \frac{y'}{h'} = 1$$

h et h' étant les ordonnées des points où elles rencontrent Iy'. La première droite passant par le point O_m de coordonnées $(R_m \sin\theta, R_m \cos\theta)$, on a :

$$\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\cos\theta}{h} = \frac{1}{R_m}$$

de même

$$\frac{\sin\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta}{h'} = \frac{1}{R_f}$$

Hosted by Google

On en déduit :

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)+\cos\theta\left(\frac{1}{h'}-\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{R_f}-\frac{1}{R_m}=\frac{\omega}{V}$$

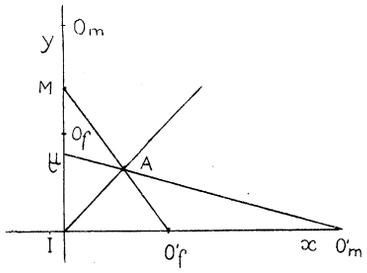
et en tenant compte de la formule Savary $h' = h$.

Les deux droites MO_m, $\mu\, O_f$ coupent donc Iy' au même point H.

Par suite, M étant donné pour déterminer μ, on tire la droite MO_m qui coupe en H la perpendiculaire à IM.

La droite HO_f donne ensuite le point μ par son intersection avec IM.

11. La construction que nous venons d'indiquer tombe en défaut si le point M se trouve sur la normale Iy aux roulantes.



Prenons alors $IO'_f = IO_f$. $IO'_m = IO_m$

Les droites MO'_f *et* $\mu\, O'_m$ *se coupent sur la bissectrice de l'angle* x I y.

Effectivement MO'_f et $\mu\, O'_m$ ont pour équations :

$$\frac{x}{R_f}+\frac{y}{r}-1=0$$

$$\frac{x}{R_m}+\frac{y}{\rho}-1=0$$

Le point commun A à ces deux droites vérifie donc :

$$x\left(\frac{1}{R_f}-\frac{1}{R_m}\right)+y\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right)=0$$

Mais

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}=\sin\theta\left(\frac{1}{R_f}-\frac{1}{R_m}\right)$$

Hosted by Google

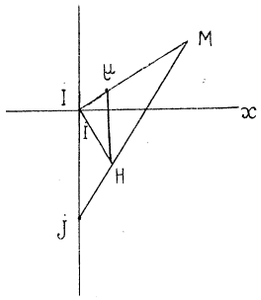
et comme dans le cas actuel $\theta = \frac{\pi}{2}$, la relation entre x et y devient :

$$\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) \cdot \left(x - y\right) = 0$$

$x = y$ et le point A est bien sur la bissectrice de xIy.

On en déduit sans peine une construction qui donnera μ connaissant M.

12. **Cercle de roulement.** — Le centre de courbure de la trajectoire du point M dépend uniquement de I, de la tangente Ix aux roulantes et de $\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$



On pourra donc, pour construire les centres de courbure, substituer aux deux roulantes deux autres roulantes simplement assujetties à être tangentes en I à Ix et avoir des rayons de courbure vérifiant $\frac{1}{R'_f} - \frac{1}{R'_m} = \frac{\omega}{V}$.

En particulier, on peut faire jouer à l'axe Ix le rôle de roulante fixe, et prendre pour roulante mobile un cercle.

On aura alors $R'_f = \infty$ et par suite $R'_m = -\frac{V}{\omega}$. Le cercle sera donc le cercle ayant pour centre le point J et tangent à Ix. Il a été nommé par Abel Transon *cercle de roulement* (*Méthode géométrique pour les rayons de courbure, journal de mathématiques,* t. X. p. 154, 1845). Dans ce cas, O_f est à l'infini sur Iy et O_m est en J. En menant JM et prenant son point de rencontre H avec la perpendiculaire à IM, il suffira de mener par H une parallèle à Iy pour obtenir le centre de courbure μ.

On aurait une deuxième construction analogue à la précédente en prenant Ix pour roulante mobile, la roulante fixe serait alors le cercle de centre K.

Hosted by Google

13. **Coordonnées du centre de courbure de la trajectoire d'un point.** — Exprimons les coordonnées $(\alpha\,\beta)$ du point μ en fonction des coordonnées (xy) du point M.

On a :

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\rho}{r}$$

et en posant pour abréger $K = \frac{V}{\omega}$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{K \sin \theta}$$

On en tire

$$\frac{\rho}{r} = \frac{K \sin \theta}{r + K \sin \theta} = \frac{Ky}{x^2 + y^2 + Ky}$$

D'où les formules :

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{Kxy}{x^2 + y^2 + Ky} \\ \beta = \dfrac{Ky}{x^2 + y^2 + Ky} \end{cases}$$

Inversement, x et y s'expriment à l'aide de α et β par des formules analogues ; il suffit, dans les formules (1), de changer x et y en α et β et K en $-$ K ; on obtient :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-K\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - K\beta} \\ y = \dfrac{-K\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - K\beta} \end{cases}$$

On voit que la transformation ponctuelle de M en μ est birationnelle. Les formules (1) ou (2) montrent que quand l'un des points M ou μ décrit une droite, l'autre point décrit une conique. En particulier, si M décrit la droite de l'infini, μ décrit le cercle des rebroussements ; si μ décrit la droite de l'infini, M décrit le cercle des inflexions.

Hosted by Google

14. Nous allons appliquer les formules précédentes à la démonstration d'un théorème utile dans certains cas pour la construction du point J.

Le point J est sur l'axe radical du cercle de diamètre Mμ *et du cercle de centre* M *passant par* I.

En désignant par X, Y les coordonnées courantes, ces deux cercles ont pour équations :

$$X^2 + Y^2 - (\alpha + x) X - (\beta + y) Y + \alpha x + \beta y = 0$$
$$X^2 + Y^2 - 2x X - 2y Y = 0$$

L'équation de l'axe radical

$$(x - \alpha) X + (y - \beta) Y + \alpha x + \beta y = 0$$

est vérifiée par les coordonnées (0, — K) du point J.

On est ramené en effet à

$$\alpha x + \beta y = K (y - \beta)$$

qui résulte des formules (1).

En particulier, on voit que si un point de la figure décrit une droite, le point J est sur cette droite.

15. **Mouvement inverse.** — Soit un plan P′ mobile sur le plan P; nous pouvons représenter ce mouvement de P′ par rapport à P par le symbole (P′P). Réciproquement, P est en mouvement par rapport à P′. Ce mouvement (PP′) est dit *l'inverse* du premier.

Un point quelconque M du plan P coïncide à l'instant t avec un certain point M′ du plan P′.

La vitesse V′ *de* M′ *dans le mouvement* (P′P) *est égale et opposée à la vitesse* V *de* M *dans le mouvement inverse* (PP′). En effet, regardons le mouvement de M par rapport à P comme résultant du mouvement de M dans P′ et du mouvement d'entraînement (P′P). La vitesse relative de M est V, sa vitesse d'entraînement est V′ et comme la vitesse absolue de M, par rapport à P est nulle, V et V′ sont bien égales et opposées.

Hosted by Google

En particulier, soit I le centre instantané correspondant au mouvement (P'P) a un instant donné.

Le point de P', qui coïncide aves I, a l'instant considéré à sa vitesse V' nulle. Donc, le point de P, qui coïncide avec I, a aussi sa vitesse nulle dans le mouvement (PP') et I est aussi le centre instantané relatif au mouvement inverse. Il suit de là que si (I_f) et (I_m) sont les roulantes fixe et mobile dans le mouvement (P'P), dans le mouvement inverse, la roulante fixe est (I_m) et la roulante mobile (I_f).

La formule $\frac{1}{K} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$ montre que quand on passe d'un mouvement à son inverse, il y a simplement échange entre les points J et K. Le cercle des inflexions de chacun des mouvements et le cercle des rebroussements relatif à l'autre.

Hosted by Google

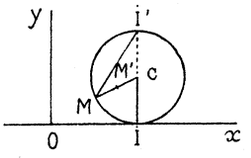
CHAPITRE II

APPLICATIONS.

1. Nous allons appliquer les généralités du chapitre précédent à l'étude de quelques mouvements simples d'une figure plane ; nous ferons abstraction de la loi du temps en nous occupant uniquement des positions successives de la figure. Un mouvement géométrique sera défini par deux conditions géométriques telles que la donnée de la trajectoire d'un point, ou de l'enveloppe d'une ligne appartenant à la figure. Nous chercherons à déterminer les courbes roulantes, et pour chaque position du plan mobile nous essaierons d'obtenir le centre géométrique J des accélérations dont la connaissance entraîne celle des rayons de courbure.

Traitons d'abord quelques cas où on définit le mouvement en donnant les deux roulantes elles-mêmes.

2. **La roulante fixe est une droite et la roulante mobile un cercle.**



Tout point de la circonférence mobile décrit alors une courbe appelée *cycloïde* ; tout point du plan mobile non situé sur la circonférence décrit une courbe dite *cycloïde allongée*, ou *cycloïde raccourcie* selon qu'il est extérieur ou intérieur à la circonférence.

Hosted by Google

On obtient aisément les équations de ces courbes. Soit M′ un point de la figure ; c le centre du centre roulant ; CM′ rencontre en M la circonférence. Prenons pour origine le point O sur lequel M peut venir s'appliquer et posons :

$$\mathrm{CI} = \mathrm{R}, \qquad \mathrm{CM}' = h, \qquad \widehat{\mathrm{MCI}} = \varphi$$

En projetant sur Ox et Oy le contour OICM′ et sa résultante OM′, on a :

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}\varphi - h \sin \varphi \\ y = \mathrm{R} \quad - h \cos \varphi \end{cases}$$

Ces équations représentent une cycloïde pour $h = \mathrm{R}$, une cycloïde allongée pour $h > \mathrm{R}$, raccourcie pour $h < \mathrm{R}$.

Les trois courbes se déroulent à l'infini entre deux droites parallèles en se reproduisant périodiquement.

Le point de contact I du cercle (c) avec Ox est le centre instantané et par suite IM′ est la normale en M′ à la cycloïde décrite par M′. En particulier, la tangente à la cycloïde, décrite par M, s'obtient en joignant M au point I′ diamétralement opposé au point I. Cette construction, que Chasles regardait « comme merveilleuse de simplicité » a été indiquée par Descartes (*Lettres de Descartes*, t. II, éd. 1724, p. 39). Le premier aussi, Descartes s'est occupé des cycloïdes raccourcies et allongées et en a déterminé les tangentes.

Cherchons le point J d'ordonnée — K. On a

$$\frac{1}{\mathrm{K}} = \frac{1}{\mathrm{R}_f} - \frac{1}{\mathrm{R}_m}$$

avec

$$\mathrm{R}_l = \infty \qquad \mathrm{R}_m = \mathrm{R}$$

d'où

$$\mathrm{K} = -\mathrm{R}$$

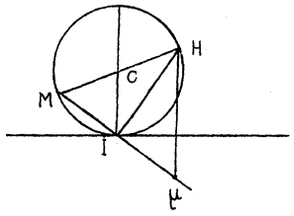
Le centre géométrique des accélérations est donc le centre C du cercle mobile et le cercle des inflexions est le cercle de diamètre IC.

Hosted by Google

Pour qu'une cycloïde ait un point d'inflexion, il faut et il suffit que dans une certaine position de la figure mobile le point décrivant vienne sur le cercle des inflexions, sauf au point I. On voit ainsi que, seules, les cycloïdes raccourcies ont des points d'inflexion.

De même pour qu'une trajectoire ait un rebroussement, il faut et suffit que le point décrivant devienne le centre instantané dans une certaine position de la figure. Il ne peut en être ainsi que pour les points de la circonférence mobile, et en général pour les points de la roulante mobile (I_m). Donc, seule, la cycloïde a des points de rebroussement.

Le point J déterminé, on obtient le centre de courbure d'une trajectoire par la construction du numéro (12).



Appliquons à la cycloïde :

M étant le point décrivant la perpendiculaire à IM en I rencontre MC au point H diamétralement opposé à M. La parallèle Hμ à CI rencontre MI au centre de courbure μ de la cycloïde en M.

Le point H est lié à la circonférence et décrit une cycloïde qui résulte de la cycloïde décrite par M par une translation parallèle à la base et égale à πR; en second lieu, on a $H\mu = 2\ CI = 2\ R$.

La développée d'une cycloïde est donc une deuxième cycloïde qu'on déduit de la première par une translation πR parallèle à la base suivie d'une translation 2 R normale à la base.

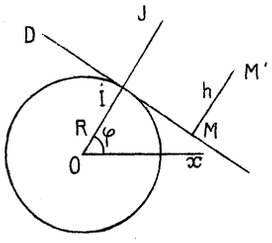
La développée de la cycloïde se trouve par là, comme celle de la spirale logarithmique une courbe superposable à la courbe originelle, ce que parlant de la spirale logarithmique Jacques Bernouilli exprimait par cette image : « *eadem mutata resurgit.* »

3. La roulante fixe est un cercle et la roulante mobile une droite.

Ce mouvement est inverse du précédent. Tout point M de la droite roulante D décrit une courbe normale à IM et par suite orthogonale à toutes les tangentes du cercle fixe (O). Le centre de

Hosted by Google

courbure de cette courbe, au point M, est le centre instantané I, car il est le point de rencontre de deux normales infiniment voisines.



Les trajectoires de tous les points de la droite D ont donc pour développée le cercle fixe. En d'autres termes, elles sont les *développantes* de ce cercle. Ce résultat est général ; quand la roulante mobile est une droite, tous ses points décrivent les développantes de la roulante fixe.

Cherchons l'équation de la courbe décrite par un point M′ du plan mobile ; soit M sa projection sur D et h la mesure du vecteur MM′ le sens positif étant le sens de O vers I. Si l'axe de x passe par le point du cercle avec lequel M a coïncidé, on a, en désignant par φ l'angle xOI et projetant sur Ox et Oy le contour OIMM′ et sa résultante OM′

$$\begin{cases} x = (R + h)\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi \\ y = (R + h)\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

Le lieu de M′ s'obtient en prenant sur les tangentes à une développante de cercle, une longueur fixe h à partir du point de contact.

Cherchons le point J. On a

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$$

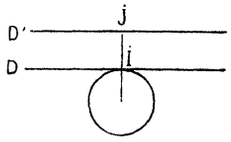
avec

$$R_m = \infty, \quad R_f = R$$

d'où

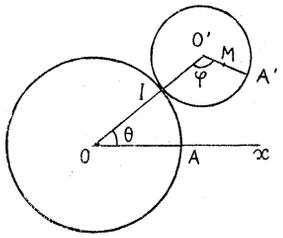
$$K = R$$

Le point J est donc le symétrique du point O par rapport à I. On voit que si on mène D′ à la distance R de D et du côté opposé au cercle fixe, seuls les points compris dans la bande DD′ pourront décrire des trajectoires ayant des points d'inflexion.



Hosted by Google

4. **Les deux roulantes sont des cercles.** — Tout point de la circonférence mobile décrit une courbe appelée *épicycloïde* ou *hypocycloïde* suivant que les cercles ont un contact extérieur ou intérieur. La courbe décrite par un point intérieur au cercle est dite épicycloïde ou hypocycloïde *raccourcie*, et par un point extérieur épicycloïde ou hypocycloïde *allongée*.



Cherchons les équations de ces courbes. Désignons par R le rayon du cercle fixe, par R′ le rayon du cercle mobile affecté du signe + ou — selon que le contact est extérieur ou intérieur. Soit M un point quelconque lié au cercle mobile, Le vecteur O′M rencontre en A′ la circonférence O′. Nous prenons pour axe Ox l'axe passant par le point A du cercle O avec lequel A′ a coïncidé. Posons $\widehat{xoI} = \theta$ $\widehat{IO'M} = \varphi$. L'angle de Ox avec O′M sera $\theta + \varphi + \pi$. Posons enfin $O'M = h$. En projetant sur Ox et Oy le contour OO′M et sa résultante OM. On a :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = (R + R')\cos\theta - h\cos\left(1 + \dfrac{R}{R'}\right)\theta \\ y = (R + R')\sin\theta - h\sin\left(1 + \dfrac{R}{R'}\right)\theta \end{cases}$$

en tenant compte de la relation $R\theta = R'\varphi$. Pour les hypocycloïdes, il suffit de changer h en $-h$.

Les courbes représentées par ces équations sont en général périodiques, non fermées et transcendantes. Elles deviennent algébriques et fermées quand le rapport $\dfrac{R}{R'}$ est commensurable.

Soit en particulier : $\dfrac{R}{R'} = -2$; les équations (1) deviennent :

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{R}{2} + h\right)\cos\theta \\ y = \left(\dfrac{R}{2} - h\right)\sin\theta \end{cases}$$

Hosted by Google

équations qui représentent une ellipse dont la somme ou la différence des axes est égale à 2 R, suivant que le point M est intérieur ou extérieur au cercle roulant. Pour le point A′ $h = \frac{R}{2}$ et $y = o$; le point A décrit donc un diamètre du cercle fixe.

Un autre cas particulier intéressant est celui où une circonférence roule à l'intérieur d'une circonférence fixe de rayon quatre fois plus grand. La courbe engendrée par un point de la circonférence mobile présente quatre rebroussements; on l'appelle *hypocycloïde à quatre rebroussements* ou *astroïde*. Pour obtenir son équation, faisons dans les formules (1) $R' = \frac{R}{4}$, $h = -\frac{R}{4}$, il vient :

$$\begin{cases} x = \frac{R}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) = R\cos^3\theta \\ y = \frac{R}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = R\sin^3\theta \end{cases}$$

d'où on tire en éliminant θ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

Mentionnons aussi l'épicycloïde correspondant à $R' = R$; elle est représentée par

$$\begin{cases} x - R = 2R\sin\theta(1 - \cos\theta) \\ y \quad\quad = 2R\cos\theta(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} x - R = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

on a

$$tg\varphi = tg\theta. \quad r = 2R(1 - \cos\theta)$$

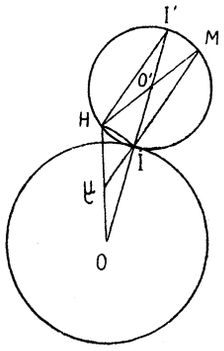
ou

$$r = 2R(1 - \cos\varphi)$$

On voit ainsi que cette courbe appelée *cardioïde* est un limaçon de Pascal ayant pour pôle le point A et obtenu en prolongeant

Hosted by Google

le rayon vecteur du cercle fixe d'une longueur égale à son diamètre. Cette courbe est aussi la caustique d'un cercle quand le point lumineux est sur la circonférence.



Appliquons la construction de Savary à la construction du centre de courbure d'une épicycloïde.

La droite joignant M au centre O' de la roulante mobile rencontre la perpendiculaire en I à IM au point H diamétralement opposé à M. La droite OH coupe MI au centre de courbure cherché μ.

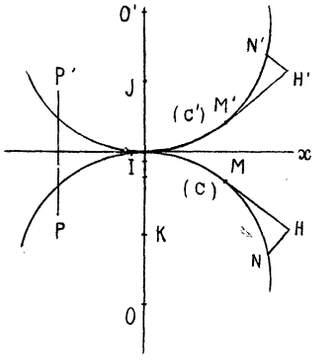
La développée d'une épicycloïde est une courbe de même nature que la courbe originelle. On a, en effet :

$$\frac{O\mu}{OH} = \frac{OI}{OI'} = \frac{R}{R + 2R'}$$

Le point μ décrit donc une courbe homothétique de la trajectoire du point H. O étant le centre d'homothétie.

Or, la trajectoire du point H est une épicycloïde résultant de l'épicycloïde décrite par M à l'aide d'une rotation d'angle $\frac{\pi R'}{R}$ autour de O. Des remarques analogues s'appliquent aux hypocycloïdes.

5. **Les deux roulantes sont des courbes symétriques.** — Supposons que pour une position particulière du plan mobile, la roulante mobile (c') soit symétrique de la roulante fixe (c) par rapport à leur tangente commune Ix.



Il en sera de même pendant tout le mouvement. Soit, en effet M', N' deux points quelconques de (c).

Leurs symétriques M,N, par rapport à Ix, sont sur (c) et la distance NH du point N à la tangente à (c)

en M est égale à la distance analogue N'H'. On a aussi arc IM = arc I'M' et MH = M'H'. On voit donc que lorsque M' sera venu en M, N' et N seront symétriques par rapport à la tangente commune aux roulantes.

Il suit de là qu'une figure F' du plan mobile reste constamment symétrique par rapport aux tangentes à (c) d'une figure F du plan fixe. En particulier, un point P' de la figure mobile reste symétrique d'un point fixe P par rapport aux tangentes à la roulante fixe et décrit, par suite, une courbe homothétique de la podaire de (c) par rapport au point P, P étant le centre et 2 le rapport d'homothétie.

Actuellement, on a

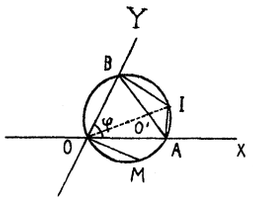
$$R_m = -R_f$$

et par suite

$$K = \frac{R_f}{2};$$

O désignant le centre de courbure de (c) le point K est au milieu de OI. On déduirait de là une construction du centre de courbure de la podaire d'une courbe quand le centre de courbure de celle-ci est connu.

6. **Mouvement d'une figure dont deux points décrivent des droites.** — Si les deux droites sont parallèles, le mouvement est une translation rectiligne et tous les points décrivent des droites parallèles.



Supposons que les deux droites OX, OY, trajectoires des points A et B de la figure se rencontrent en un point O et soit φ leur angle.

Les perpendiculaires en A et B à OX et OY se coupent au centre instantané I. Le point I est sur le cercle circonscrit au triangle OAB; or, ce cercle est lié à la figure mobile, car il passe par A et B et son diamètre $2R = \frac{AB}{\sin\varphi}$ est déterminé.

Hosted by Google

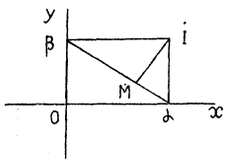
Le lieu point I dans le plan mobile est donc ce cercle (O′). D'autre part, OI est un diamètre du cercle (O′).

Le lieu du point I dans le plan fixe est par suite le cercle de centre (O) et de rayon 2 R.

Le mouvement de la figure s'obtient donc en faisant rouler sans glissement un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double.

Le cercle (O′) passant constamment par O. Si M est un point lié à ce cercle, l'angle AOM est constant et le point M décrit un diamètre du cercle (O). Ainsi :

Il y a une infinité de points qui décrivent des droites, ce sont les points du cercle O′ ; *leurs trajectoires sont les diamètres du cercle fixe* (O).



Cherchons maintenant la trajectoire d'un point quelconque M ; soit α et β les extrémités du diamètre de (O′) passant par M ; α et β décriront deux droites rectangulaires Ox et Oy. Désignons par a et b respectivement les segments Mβ, Mα en supposant par exemple M entre α et β, c'est-à-dire à l'intérieur du cercle (O′). On aura θ étant l'angle de αβ avec l'axe des x.

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

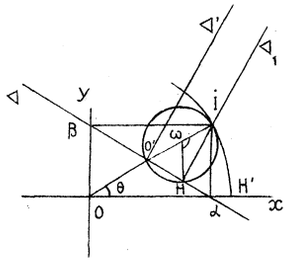
avec

$$a + b = \alpha\beta = 2\mathrm{R}$$

Donc : *Tous les points de la figure décrivent des ellipses. Pour les ellipses relatives aux points intérieurs au cercle* (O′) *la somme des axes est égale à* 4 R. *Si les points sont extérieurs au cercle* (O′) *la différence des axes des ellipses correspondantes est égale à* 4R. *Toutes ces ellipses ont pour cercle le point* O *et celles qui correspondent aux points d'un diamètre de* (O′) *ont mêmes directions d'axes.*

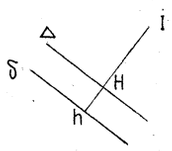
Hosted by Google

Proposons-nous de trouver les enveloppes des droites de la figure. Soit d'abord une droite Δ passant par le centre de (O') elle coupe (O') en deux points α et β qui décrivent deux droites rectangulaires Ox, Oy. Le point H où Δ touche son enveloppe est la projection de I sur Δ. Si ω est le milieu de O'I, on voit aisément que l'angle IωH est le quadruple de l'angle IOH'. Le cercle de diamètre O'I est tangent au cercle (O) et son rayon est le quart du rayon de ce dernier. Il en résulte que les arcs IH et IH' de ces deux cercles sont égaux; et le lieu du point H est l'hypocycloïde à 4 rebroussements (H) inscrite dans le cercle (O) ayant Ox et Oy pour axes de symétrie.



Remarquons que la normale Δ_1 en H à l'hypocycloïde est homothétique de la perpendiculaire Δ' à Δ menée par O', O étant le centre, 2 le rapport; Δ' passant par O' enveloppera une hypocycloïde (H') résultant de (H) par une rotation de 45° autour du point O. Par suite Δ_1 enveloppe aussi une hypocycloïde à 4 rebroussements (H_1) homothétique de (H') dans le rapport 2, O étant le centre d'Homothétie.

Si la droite de la figure δ ne passe pas par O' considérons la parallèle Δ à δ menée par O'. Soit H et h les points où Δ et δ touchent leur enveloppe. La longueur Hh est constante et égale à la distance de Δ et δ ; H décrit une hypocycloïde. Donc :



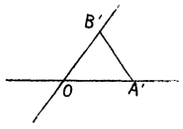
L'enveloppe de δ est donc une courbe parallèle d'hypocycloïde à 4 rebroussements.

Si nous remarquons que l'hypocycloïde (H) est une développante de sa développée (H_1), on trouve une autre signification pour les enveloppes de droites.

Les enveloppes d'une famille de droites parallèles dans le plan mobile sont les développantes d'une hypocycloïde à 4 rebroussements. Il devient alors aisé de se rendre compte de la forme de ces enveloppes en considérant l'extrémité d'un fil qui s'enroule sur une hypocycloïde.

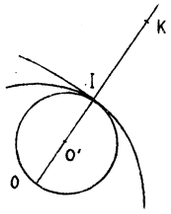
Hosted by Google

Observons que δ étant une droite du plan mobile les deux points A′ et B′ où elle coupe le cercle (O′) décrivent deux droites issues de O faisant entre elles un angle différent de 90° ; il est alors démontré que :



Une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites non rectangulaires, enveloppe une développante d'hypocycloïde à 4 rebroussements.

Pour terminer, cherchons le centre géométrique des accélérations ; nous avons :

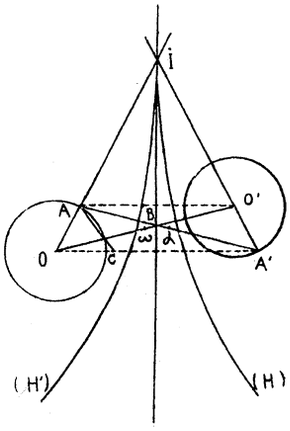


$$R_m = R. \quad R_f = 2R \quad \frac{1}{K} = -\frac{1}{2R}$$

Donc le point J est en O et le cercle (O′) est le cercle des inflexions. Ce résultat était à prévoir puisque tous les points de (O′) décrivent des droites.

On déduirait facilement de là une construction du centre de courbure d'une ellipse ou d'une hypocycloïde à 4 rebroussements.

7. Mouvement d'une figure dont deux points décrivent deux cercles égaux, la ligne des centres étant égale à la distance des deux points. — Soit A,A′ les deux points de la figure décrivant deux cercles égaux (O) (O′) la distance OO′ des centres étant égale à AA′. Le centre instantané I est à la rencontre des normales en A et A′ aux trajectoires de ces points, c'est-à-dire est l'intersection des rayons OA et O′A′. Les triangles OAA′ et OO′A′ sont égaux ; on en conclut sans peine que les quatre points OO′A′A sont sur une même circonférence et que B étant le point commun à OO′ et AA′, IB est un axe de symétrie du quadrilatère concave OAA′O′.



Hosted by Google

Si on pose $OA = O'A' = R$ et $OO' = 2\,d$. On a :

$$IO - IO' = IO - IA = R$$

La courbe (I_l) est donc l'hyperbole (H) de foyers O et O′ ayant R pour axe transverse.

On a de même

$$IA' - IA = IA' - IO' = R$$

La roulante (I_m) est une deuxième hyperbole (H′) des foyers A et A′ ayant R pour axe transverse.

Les deux roulantes sont donc égales; elles sont en outre symétriques par rapport à leur tangente commune IB et nous sommes dans le cas étudié au numéro 5. Par conséquent :

Les trajectoires des points de la figure mobile sont des podaires d'hyperbole.

En particulier, la trajectoire du milieu α de AA′ est la podaire par rapport au milieu ω de OO′ de l'hyperbole homothétique de (H), ω étant le centre, 2 le rapport d'homothétie.

On obtient aisément l'équation en coordonnées bipolaires du lieu de α.

Posons :

$$r = \alpha O \qquad r' = \alpha O' \qquad \rho = OA' \qquad \rho' = AO'$$

Dans les triangles AOA′ et AO′A′, on a :

$$\begin{cases} R^2 + \rho^2 = 2d^2 + 2r^2 \\ R^2 + \rho'^2 = 2d^2 + 2r'^2 \end{cases}$$

En outre, AC étant parallèle à O′A′ on a $\rho\rho' = A'O.\,A'C$; $\rho\rho'$ est donc la puissance du point A′ par rapport au cercle de centre A et de rayon R et $\rho\rho' = 4\,d^2 - R^2$. L'élimination de ρ et ρ' entre ces trois relations donne l'équation du lieu de α en coordonnées r et r'.

Une simplification se produit si $2\,d^2 = R^2$; (H) et (H′) deviennent alors des Hyperboles équilatères, et on a :

$$2r^2 = \rho^2 \qquad 4r^2r'^2 = 4d^4 \qquad rr' = d^2$$
$$2r'^2 = \rho'^2$$

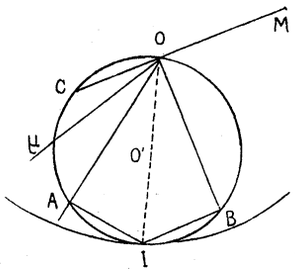
Hosted by Google

Donc : *La trajectoire du milieu de* AA′ *est une lemniscate de foyers* O *et* O′. Nous voyons en même temps que la podaire d'une Hyperbole équilatère par rapport à son centre est une lemniscate.

Le centre géométrique des accélérations J s'obtiendra simplement en appliquant le théorème indiqué au numéro 14 du précédent chapitre ; on construira l'axe radical du cercle de diamètre AO et du cercle de centre A passant par I.

Comme on sait, d'autre part, que J est le milieu du rayon de courbure de (H′) on déduirait de là une certaine construction du centre de courbure d'une Hyperbole.

8. **Mouvement d'une figure dont deux droites enveloppent des cercles.** — Si une droite du plan mobile enveloppe un cercle, toute droite parallèle enveloppe un cercle concentrique au premier et pour que le mouvement soit déterminé, nous devons supposer que les deux droites, considérées δ et δ', ne sont pas parallèles. Soit ρ le rayon du cercle γ enveloppé par δ; une droite de la figure menée parallèlement à δ à une distance ρ et, d'un côté convenable, passera par le centre de γ. De même une certaine parallèle à δ' passera constamment par un point fixe. Nous sommes donc ramenés à considérer deux droites de la figure, se coupant en un point O, faisant entre elles un angle θ et pivotant autour de deux points A et B.



Les normales en A et B à OA et OB se coupent au centre instantané I. Le cercle AIB est déterminé, car il passe par A et B a un diamètre constant $2R = \frac{AB}{\sin\theta}$.

Le lieu du centre instantané dans le plan fixe est un cercle (O′) passant par A et B de rayon R, et de centre O′.

Hosted by Google

OI est un diamètre de (O'), par suite est constant, et le lieu de I dans le plan mobile est un cercle (O) de centre O et de rayon 2 R. Le mouvement s'obtiendra en faisant rouler le cercle (O) sur le cercle fixe de rayon moitié (O') ; il est donc l'inverse du mouvement étudié au numéro 6.

Occupons-nous des enveloppes des droites de la figure. Soit une droite passant par O, elle rencontre O' en un second point μ.

L'angle AO μ étant constant, l'arc Aμ est aussi constant et le point μ est fixe.

Il y a donc une infinité de droites qui passent par des points fixes ; ces droites sont issues d'un même point O *du plan mobile, et le lieu de leurs pivots est le cercle* (O').

Considérons maintenant une droite quelconque Δ du plan mobile. La parallèle à Δ, menée par O, passe par un point fixe μ, et par suite Δ enveloppe un cercle de centre μ. Ainsi :

Toutes les droites de la figure enveloppent des cercles dont les centres sont sur le cercle (O')

On peut encore énoncer cette propriété sous la forme suivante : *quand deux côtés d'un triangle enveloppent des cercles, il en est de même du troisième côté.*

Cherchons la trajectoire d'un point quelconque M. La droite OM passe par un point fixe C du cercle (O') et on a le lieu du point M en prolongeant de la longueur constante OM le rayon vecteur CO du point O. Donc :

Les trajectoires de tous les points sont des limaçons de Pascal ayant tous le cercle (O') *pour cercle directeur.*

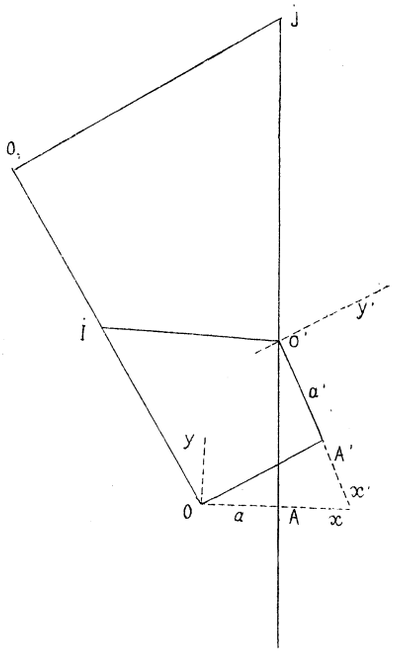
Il n'y a qu'un seul point de la figure, le point O, qui décrive un cercle.

On pourrait de bien des manières définir par deux conditions le mouvement qui nous occupe. Voici une forme assez simple : *Le mouvement précédent est celui d'une figure dont un point décrit un cercle, une droite de la figure enveloppant un deuxième cercle ayant son centre sur le premier.*

Pour obtenir le point J où, ce qui revient au même, le point K, remarquons que le cercle (O'), lieu des centres de courbure des enveloppes de droite, est le cercle des rebroussements. Le point K est donc en O. La construction de Savary fait alors connaître le centre de courbure d'une conchoïde de cercle.

Hosted by Google

9. Mouvement d'une figure dont un point décrit une droite et dont une droite enveloppe un cercle.



Une certaine droite OA′ de la figure passe alors par un point fixe O pendant que le point O′ décrit une droite O′A.

Le centre instantané I est l'intersection de la perpendiculaire en O′ à O′A, et de la perpendiculaire en O à OA′.

Soit OA et O′A′ les distances des points O et O′ aux droites O′A, OA′. Rapportons le plan fixe et le plan mobile respectivement aux axes Oxy, $O'x'y'$ indiqués dans la figure ci-contre, et posons $OA = a$ $O'A' = a'$.

Entre les coordonnées absolues et relatives d'un point, on a les relations :

$$\begin{cases} x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

y_0 désignant l'ordonnée du point O′. Pour déterminer y_0 en fonction de α, exprimons que pour $x = y = o$ $x' = a'$ et y' arbitraire les équations précédentes sont compatibles ; nous aurons

$$y_0 = -\frac{a' + a\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Les coordonnées d'un point $(x'y')$ du plan mobile sont ainsi exprimées à l'aide de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$; si on exprime ceux-ci en fonction du paramètre $t = tg\,\frac{\alpha}{2}$, on voit que :

Les trajectoires sont des courbes unicursales du quatrième ordre.

Hosted by Google

Cherchons le lieu du centre instantané dans le plan mobile. On peut représenter le temps par α; on aura $\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\alpha} = 0$ pour le point vérifiant les équations :

$$\begin{cases} x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = 0 \\ x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + \dfrac{a + a' \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0 \end{cases}$$

On en tire

$$\begin{aligned} x' &= - r \cos \alpha \\ y' &= \quad r \sin \alpha \end{aligned}$$

avec

$$r = \frac{a + a' \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

et en éliminant r et α

$$(y'^2 + a'x)^2 = a^2 (x'^2 + y'^2)$$

Telle est l'équation de la courbe (I_m). Remarquons que la définition géométrique du point I est la même par rapport aux deux systèmes d'axes; il suffit d'échanger a et a'; il en résulte que la courbe (I_f) a pour équation :

$$(y^2 + ax)^2 = a'^2 (x^2 + y^2)$$

Donc : *Les deux roulantes sont des courbes du quatrième ordre ayant pour point double l'une* O, *l'autre* O'.

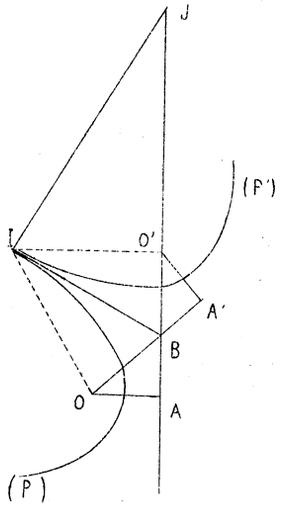
Si a ou $a' = 0$ l'une des roulantes devient une parabole.

La tangente commune en I aux deux roulantes et les rayons de courbure des trajectoires et des enveloppes peuvent s'obtenir géométriquement; il suffit pour cela de trouver le point J. Or le point O_1 symétrique de O par rapport à I est sur le cercle des inflexions puisque O est sur celui des rebroussements. Le point J est donc sur la perpendiculaire à O_1I menée en O_1; il est aussi sur la droite O'A' trajectoire du point O'.

Hosted by Google

Dans le cas particulier $a = a'$ une notable simplification se produit. On a alors

$$OA' = O'A$$



IB est un axe de symétrie du quadrilatère OA'O'A et IO' = IO.

La roulante fixe (I_f) est donc la parabole (P) ayant O pour foyer et O'A pour directrice et la roulante (I_m) est la parabole (P') de foyer O' de directrice OA'; ces deux paraboles sont égales et symétriques par rapport à la tangente commune en I.

Par suite, dans ce cas : *Les trajectoires sont des podaires de parabole.*

En se reportant aux expressions analytiques on voit que $y_0 = -a \cot \frac{\alpha}{2}$ et le degré des trajectoires s'abaisse du quatrième degré au troisième.

Le point J est le point de rencontre de la normale commune avec la droite O'A. Le point K symétrique de J par rapport à I est comme on sait le milieu du rayon de courbure de la parabole (P). Nous obtenons cette propriété :

Le rayon de courbure d'une parabole est le double du segment compris sur la normale entre le point d'incidence et la directrice.

On voit facilement que le point A' décrit une strophoïde droite de point double A, et le milieu de O'A' une cissoïde droite ayant pour point de rebroussement le sommet de (P). D'après ce qui précède on saura donc construire la tangente et le centre de courbure d'une cissoïde ou d'une strophoïde droite.

Hosted by Google

CHAPITRE III

ÉTUDE ANALYTIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

1. **Projections de la vitesse d'un point.** — Soient OXYZ, un système d'axes rectangulaires liés au corps mobile, et $oxyz$, un système d'axes fixes rectangulaires les deux trièdres de coordonnées étant directs. Par rapport au trièdre fixe, le mouvement du trièdre mobile sera défini par les expressions des coordonnées absolues $x_0 y_0 z_0$ de son origine O et des cosinus directeurs de ses axes en fonction du temps. Les cosinus directeurs étant indiqués par le tableau suivant :

	X	Y	Z
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

on a entre les coordonnées absolues (xyz) et relatives (XYZ) d'un point M du solide, les relations :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y = y_0 + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z = z_0 + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{cases}$$

les neuf cosinus vérifiant :

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases}$$

Hosted by Google

et

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \end{cases}$$

d'où on tire par différentiation :

$$\sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \sum \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} = \sum \alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} \sum \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} = -\sum \alpha' \frac{d\alpha''}{dt} = p \\ \sum \alpha \frac{d\alpha''}{dt} = -\sum \alpha'' \frac{d\alpha}{dt} = q \\ \sum \alpha' \frac{d\alpha}{dt} = -\sum \alpha \frac{d\alpha'}{dt} = r \end{cases}$$

Soit V_x, V_y, V_z, les projections de la vitesse du point M sur les axes fixes, V_X, V_Y, V_Z, les projections sur les axes mobiles.

On aura :

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx_o}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt} \\ V_y = \frac{dy_o}{dt} + X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt} \\ V_z = \frac{dz_o}{dt} + X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt} \end{cases}$$

$$V_X = \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = \alpha\frac{dx_o}{dt} + \beta\frac{dy_o}{dt} + \gamma\frac{dz_o}{dt} + X\,\Sigma\,\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$
$$+ Y\,\Sigma\,\alpha\frac{d\alpha'}{dt} + Z\,\Sigma\,\alpha\frac{d\alpha''}{dt} \quad \text{etc.}$$

Les composantes de la vitesse suivant les axes mobiles sont donc de la forme :

$$(4)\qquad \begin{cases} V_X = a + qZ - rY \\ V_Y = b + rX - pZ \\ V_Z = c + pY - qX \end{cases}$$

Hosted by Google

abc désignant les projections sur les axes mobiles de la vitesse de leur origine O. Cette origine est d'ailleurs arbitraire dans le solide. En interprétant les formules (4), nous retrouvons ce théorème :

La vitesse de tout point du solide est la même que si celui-ci était animé d'une translation ayant pour vitesse celle d'un point arbitraire O *du corps et d'une rotation autour d'un axe issu du point* O.

Remarquons que *pqr* dépendent seulement des neuf cosinus, c'est-à-dire de l'orientation du solide. Le vecteur qui représente la rotation est donc indépendant du point O.

En traduisant la propriété géométrique qui précède, dans le système d'axes fixes, on a :

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx_0}{dt} + q_1 (z - z_0) - r_1 (y - y_0) \\ V_y = \dfrac{dy_0}{dt} + r_1 (x - x_0) - p_1 (z - z_0) \\ V_z = \dfrac{dz_0}{dt} + p_1 (y - y_0) - q_1 (x - x_0) \end{cases}$$

$p_1 q_1 r_1$ désignant les composantes de la rotation instantanée suivant les axes fixes, ou encore :

$$(4') \qquad \begin{cases} V_x = a_1 + q_1 z - r_1 y \\ V_y = b_1 + r_1 x - p_1 z \\ V_z = c_1 + p_1 y - q_1 x \end{cases}$$

$a_1 b_1 c_1$ étant les projections sur les axes fixes de la vitesse du point du solide qui, à l'instant t, coïncide avec leur origine.

2. Equations de l'axe hélicoïdal. — Le lieu des points du solide dont la vitesse est parallèle à la rotation instantanée est la droite

$$\frac{a + qZ - rY}{p} = \frac{b + rX - pZ}{q} = \frac{c + pY - qX}{r}$$

Nous retrouvons ainsi l'axe instantané de rotation et de glisse-

Hosted by Google

ment et obtenons en même temps ses équations dans le système mobile. L'élimination de t entre ces équations donne la surface virante (Δ_m).

Dans le système fixe, l'axe hélicoïdal a pour équations :

$$\frac{a_1 + q_1 z - r_1 y}{p_1} = \frac{b_1 + r_1 x - p_1 z}{q_1} = \frac{c_1 + p_1 y - q_1 x}{r_1}$$

d'où on tire par élimination de t l'équation de la surface (Δ_f).

Nous avons vu géométriquement que tous les points de l'axe hélicoïdal ont même vitesse ; on peut le retrouver par la voie analytique. On a, en général, pour la vitesse V du point M

$$V^2 = (a + qZ - zY)^2 + (b + rX - pZ)^2 + (c + pY - qX)^2$$

Si le point est sur l'axe hélicoïdal :

$$\begin{cases} a + qZ - rY = \lambda p \\ b + rX - pZ = \lambda q \\ c + pY - qX = \lambda r \end{cases}$$

et $V = \lambda\,\omega$ en posant $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$. D'autre part, si on ajoute les équations précédentes après les avoir respectivement multipliées par p, q, r. On a :

$$pa + qb + rc = \lambda\omega^2$$

et par suite :

$$V = \frac{pa + qb + rc}{\omega}$$

La vitesse ne dépend pas de la position du point sur l'axe. Le mouvement se réduira à chaque instant à une rotation si la fonction de t $pa + qb + rc$ est identiquement nulle.

3. **Accélération d'un point.** — Cherchons les projections sur les axes fixes de l'accélération d'un point M (xyz) du

Hosted by Google

solide. En différentiant les formules (4') on a 3 égalités telles que :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{da_1}{dt} + q_1 \frac{dz}{dt} - r_1 \frac{dy}{dt} + z \frac{dq_1}{dt} + y \frac{dr_1}{dt}$$

En remplaçant $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, par leurs expressions (4') il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{da_1}{dt} + q_1c_1 - r_1b_1 + p_1(p_1x + q_1y + r_1z) - \omega^2x + z\frac{dq_1}{dt} - y\frac{dr_1}{dt}$$

ω désignant la rotation instantanée.

On a donc :

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = A + p_1(p_1x + q_1y + r_1z) - \omega^2x + z\frac{dq_1}{dt} - y\frac{dr_1}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = B + q_1(p_1x + q_1y + r_1z) - \omega^2y + x\frac{dr_1}{dt} - z\frac{dp_1}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = C + r_1(p_1x + q_1y + r_1z) - \omega^2z + y\frac{dp_1}{dt} - x\frac{dq_1}{dt} \end{cases}$$

A,B,C désignant les projections sur les axes fixes du point du solide qui, à l'instant t, coïncide avec leur origine.

En posant $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$, on voit qu'en général, il y a dans le solide un point et un seul d'accélération nulle; on l'appelle *centre des accélérations*. Si on suppose l'origine des axes fixes transportés en ce point, dans les formules (5) $A = B = C = O$ et on a ce théorème :

Les accélérations de tous les points d'un solide sont les mêmes que dans le mouvement d'un solide qui aurait un point fixe au centre des accélérations et suivrait la même loi d'orientation que le premier.

4. — Nous allons maintenant nous occuper du cas où le solide a un point fixe. On peut alors prendre ce point pour origine des

Hosted by Google

axes fixes et mobiles. Les formules générales (4) et (4') devien nent :

$$(6)\qquad \begin{cases} V_X = qZ - rY \\ V_Y = rX - pZ \\ V_Z = pY - qX \end{cases}$$

$$(6')\qquad \begin{cases} V_x = q_1 z - r_1 y \\ V_y = r_1 x - p_1 z \\ V_z = p_1 y - q_1 x \end{cases}$$

Les expressions (6) montrent que les vitesses des points du solide sont les mêmes que dans la rotation définie par le vecteur dont les projections dans le système mobile sont p, q, r.

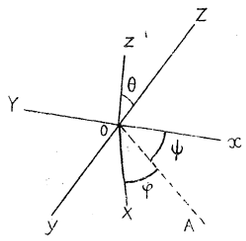
Cet axe instantané de rotation décrit dans l'espace fixe un cône (Γ_f) dont l'équation s'obtient en éliminant t entre les équations $\frac{x}{p_1} = \frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1}$. Dans le solide, il décrit un deuxième cône (Γ_m) dont l'équation résulte de l'élimination de t entre les équations $\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r}$.

Si un point M se déplace sur l'axe instantané, il décrit sur les deux cônes des courbes (C_f) et (C_m) qui sont ses trajectoires absolue et relative. La vitesse absolue est égale à la vitesse relative, car la vitesse d'entraînement du point M est nulle ; il en résulte que les deux cônes (Γ_m) et (Γ_f) se touchent suivant l'axe de rotation et que la courbe (C_m) roule sans glissement sur (C_f). Le mouvement du solide revient, comme on sait, au glissement d'une sphère sur une sphère fixe S ayant O pour centre. Soit I un des points où l'axe rencontre les deux sphères. I décrit sur la sphère fixe une courbe (I_f) tracée sur (Γ_f) et sur la sphère mobile une courbe (I_m) tracée sur $\Gamma_m)$. Les deux courbes sont tangentes en I et (I_m) roule sans glisser sur (I_f). On voit, comme pour le plan, que la courbe (I_m) de la sphère mobile est la seule qui roule sans glissement sur son enveloppe, exception étant faite bien entendu pour la courbe symétrique de (I_m) par rapport à O. Les axes de grand cercle normaux aux trajectoires des points de la sphère mobile, ou aux enveloppes en leur point de contact avec les enveloppées vont passer par le centre instantané I. La plus grande

Hosted by Google

analogie se présente donc entre le mouvement d'une figure plane dans son plan et celui d'une figure sphérique sur sa sphère.

5. Expression des composantes de la rotation à l'aide des angles d'Euler.



Nous avons exprimé p, q, r en fonction des cosinus et de leurs dérivées. On sait que ces neuf cosinus sont liés par six relations et qu'il est commode pour les applications de les exprimer au moyen de trois paramètres indépendants.

Rappelons les paramètres angulaires choisis par Euler. On désigne par θ l'angle zOZ, par ψ l'angle compris entre 0 et π formé par Ox avec la trace OA du plan des XY sur celui des xy et enfin par φ l'angle AOX.

On a alors (Voir Briot et Bouquet, *G. analytique*, p. 519, 1897).

$$\begin{cases} \alpha = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta \\ \alpha' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \\ \alpha'' = \sin\psi\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta \\ \beta' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta \\ \beta'' = -\cos\psi\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = \sin\varphi\sin\theta \\ \gamma' = \cos\varphi\sin\theta \\ \gamma'' = \cos\theta \end{cases}$$

Si on substitue ces expressions des cosinus et de leurs dérivées dans les composantes p, q, r, on trouve :

$$\begin{cases} p = \sin\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\dfrac{d\theta}{dt} \\ q = \cos\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt} \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\dfrac{d\psi}{dt} \end{cases}$$

Hosted by Google

On peut ensuite, en projetant sur les axes fixes, calculer p_1, q_1, r_1, ; on obtient :

$$\begin{cases} p_1 = \cos\psi \dfrac{d\theta}{dt} + \sin\theta \sin\psi \dfrac{d\varphi}{dt} \\ q_1 = \sin\psi \dfrac{d\theta}{dt} - \sin\theta \cos\psi \dfrac{d\varphi}{dt} \\ r_1 = \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\theta \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

6. **Composantes de l'accélération d'un point.** — Le solide ayant un point fixe, les composantes de l'accélération sont fournies par les formules générales (5) où il faut faire $a_1 = b_1 = c_1 = 0$. On a ainsi :

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = p_1(p_1x + q_1y + r_1z) - \omega^2x + z\dfrac{dq_1}{dt} - y\dfrac{dr_1}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = q_1(p_1x + q_1y + r_1z) - \omega^2y + x\dfrac{dr_1}{dt} - z\dfrac{dp_1}{dt} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = r_1(p_1x + q_1y + r_1z) - \omega^2z + y\dfrac{dp_1}{dt} - x\dfrac{dq_1}{dt} \end{cases}$$

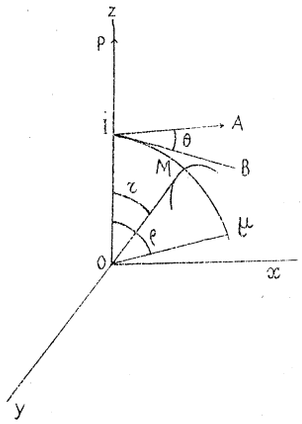
On appelle *accélération angulaire* le vecteur d'origine O ayant pour extrémité le point $\left(\dfrac{dp_1}{dt}, \dfrac{dq_1}{dt}, \dfrac{dr_1}{dt}\right)$. Les deux derniers termes des seconds membres des équations précédentes représentent les projections du moment de ce vecteur par rapport au point M.

Les autres termes sont les projections de l'accélération du point M dans le cas où l'accélération angulaire est nulle, c'est-à-dire quand l'axe instantané est constant en grandeur et direction. On a donc ce théorème dû à Rivals :

L'accélération d'un point quelconque d'un solide en mouvement autour d'un point fixe est la somme géométrique de la vitesse qu'aurait ce point dans une rotation représentée par l'accélération angulaire et de l'accélération centripète de ce point dans une rotation uniforme continue représentée par le même vecteur que la rotation instantanée.

Hosted by Google

7. **Courbure sphérique des trajectoires.** — Un point M du solide décrit une courbe sphérique (M) tracée sur une sphère S de centre O. Soit μ le centre de courbure sphérique de la trajectoire du point M, c'est-à-dire le point d'intersection de deux grands cercles infiniments voisins normaux à la courbe. Nous allons indiquer une formule simple qui fait connaître μ quand M est donné. Soient I le centre instantané sur la sphère S relatif à l'instant considéré, IA la vitesse de ce point tangente aux deux roulantes (I_f) et (I_m). Sur le grand cercle IM, fixons à partir du point I un sens positif, menons la demi-droite IB tangente à ce grand cercle dans le sens positif.



Désignons par (x, y, z) (α, β, γ) les coordonnées respectives des points M et μ, par θ l'angle AIB et par r et ρ respectivement les angles IOM, I$o\mu$ avec le signe qui résulte de celui des arcs IM, Iμ; R étant le rayon de la sphère S, nous aurons :

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{R} \sin r \cos \theta \\ y = \mathrm{R} \sin r \sin \theta \\ z = \mathrm{R} \cos r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \mathrm{R} \sin \rho \cos \theta \\ \beta = \mathrm{R} \sin \rho \sin \theta \\ \gamma = \mathrm{R} \cos \rho \end{cases}$$

La droite Oμ est l'intersection de deux plans infiniment voisins normaux à la courbe (M) ; c'est la droite polaire relative au point M, normale comme on sait au plan osculateur en M. On aura donc :

$$(9) \qquad \frac{\alpha}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{\beta}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{\gamma}{dxd^2y - dyd^2x}$$

Hosted by Google

En vue de simplifier les calculs, prenons les axes fixes de façon que I soit sur Oz, IA parallèle à Ox.

Alors $p_1 = q_1 = 0$ $r_1 = \omega$ et comme la vitesse de l'extrémité P du vecteur rotation est dans le plan tangent aux cônes roulants, on a

$$\frac{dq_1}{dt} = 0$$

Les formules (6′) et (7) deviennent :

$$(6'') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\omega y \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega x \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$(7') \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - y\dfrac{dr_1}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + x\dfrac{dr_1}{dt} - z\dfrac{dp_1}{dt} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = y\dfrac{dp_1}{dt} \end{cases}$$

En portant dans les relations (9) on obtient :

$$\frac{\alpha}{xy} = \frac{\beta}{yz} = \frac{\gamma}{\dfrac{\omega^2}{\dfrac{dp_1}{dt}}(x^2 + y^2) + yz}$$

Si on remplace $\alpha\beta\gamma$, xyz par leurs expressions (8) ces deux égalités se réduisent à une seule :

$$(10) \qquad \frac{1}{tg\rho} - \frac{1}{tgr} = \frac{1}{K \sin \theta}$$

Hosted by Google

en posant

$$K = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{dp_1}{dt}$$

formule analogue à celle de Savary.

8. **Expression de la constante K.** — La constante K de la formule (10) est susceptible d'une expression analogue à celle obtenue dans le cas du plan. Exprimons d'abord $\frac{dp_1}{dt}$; $\frac{dp_1}{dt}$ est la projection sur Ox de la vitesse du point P extrémité de la rotation instantanée OP. Or, considérons le mouvement de P comme résultant du mouvement d'entraînement de la droite OP et d'un glissement de P sur cette droite. La vitesse relative est dirigée suivant Oz; donc $\frac{dp_1}{dt}$ est la vitesse d'entraînement V′ du point P. Si V est la vitesse du point I.

$$\frac{V'}{V} = \frac{OP}{OI} = \frac{\omega}{R}$$

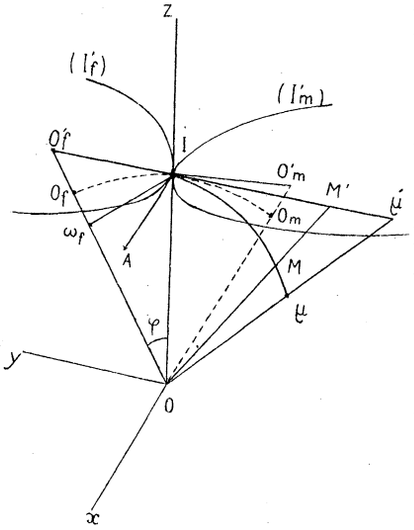
On a donc :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\omega V}{R}$$

et

$$K = \frac{V}{R\omega}$$

Nous allons exprimer K autrement en introduisant les angles affectés de signes $R_m = IOO_m$, $R_f = IOO_f$. O_m et O_f désignant les centres de courbure sphérique des roulantes. Appliquons au point I la règle de composition des accélérations et projetons sur Oy. Soit ω_f la projection du point I sur OO_f, ω_f est le centre de courbure ordinaire de la roulante (I_f). L'accélération absolue du point I, projetée sur $I\omega_f$ a pour



valeur $\frac{V^2}{I\omega_f}$; sa projection sur Oy sera :

$$\frac{V^2 \cos \varphi}{I\omega_f}$$

ou

$$\frac{V^2}{IO'_f}$$

O'_f étant la perspective du point O_f sur le plan normal en I à Oz.

De même l'accélération relative a pour projection sur Oy $\frac{V^2}{IO'_m}$

L'accélération d'entraînement du point I a pour projection :

$$-R\frac{dp_1}{dt} = -\omega V$$

d'après les formules (7') où on fait $x = y = o$ $z = R$.

Enfin, l'accélération de Coriolis est parallèle à Oy, et a pour valeur $2\omega V$.

On a donc :

$$\frac{V^2}{IO'_f} = \frac{V^2}{IO'_m} - \omega V + 2\omega V$$

et comme $IO' = R\,tg R_f$, $IO'_m = R\,tg R_m$

$$\frac{1}{tg R_f} - \frac{1}{tg R_m} = \frac{1}{K}$$

Remarquons que d'après le théorème de Meusnier IO'_f est le rayon de courbure R'_f de la courbe (I'_f) section du cône roulant (Γ_f) par le plan normal en I à Oz ; de même IO'_m est le rayon de courbure de la section (I'_m) du cône (Γ_m) par le même plan.

Si M', μ' désignant les perspectives sur ce plan des points M et μ, on pose $\rho' = I\mu'$, $r' = IM'$, on aura, d'après ce qui précède

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{r'} = \left(\frac{1}{R'_f} - \frac{1}{R'_m}\right)\frac{1}{\sin \theta}$$

Donc : *Le point μ' est le centre de courbure de la trajectoire du point M' dans le mouvement plan obtenu en faisant rouler sans glissement la courbe (I'_m) sur (I'_f).*

Hosted by Google

Il en résulte que les droites $M'O'_m$, $\mu' O'_f$ concourent sur la perpendiculaire en I à IM'. Par suite en revenant à la sphère, on voit que : *Les arcs de grand cercle* MO_m μO_f *concourent sur le grand cercle normal en* I *au grand cercle* IM. Ainsi se trouve généralisée la construction de Savary.

9. Un autre cas particulier simple du mouvement d'un solide S est celui dans lequel un plan P du solide glisse sur un plan fixe π. Tous les points situés sur une même droite perpendiculaire à P ont des trajectoires égales et parallèles et on est ramené à considérer le mouvement du plan P sur le plan π. Soit dans ce dernier mouvement I le centre instantané.

A l'instant t le mouvement du solide se réduit à une rotation s'effectuant autour de l'axe Δ mené par I perpendiculairement au plan P. Le mouvement continu s'obtient en faisant rouler le cylindre (Δ_m) ayant pour section droite la roulante (I_m) sur le cylindre (Δ_f) ayant (I_f) pour section droite.

10. Indiquons quelques applications des formules donnant les projections de la vitesse d'un point.

I. *Trouver les équations de la droite* D' *conjuguée d'une droite donnée* D.

Prenons pour axe des z l'axe hélicoïdal, l'axe des x étant la perpendiculaire commune à Oz, et à la droite D.

Celle-ci a des équations de la forme

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} x = d \\ y = z\,tg\varphi \end{cases}$$

Le plan P perpendiculaire à la vitesse d'un point M (x,y,z) a pour équation en désignant par XYZ les coordonnées courantes

$$(X - x)\,V_x + (Y - y)\,V_y + (Z - z)\,V_z = 0$$

ou $$-\omega y\,(X - x) + (Y - y)\,\omega x + g\,(Z - z) = 0$$

g désignant la vitesse de tous les points de l'axe hélicoïdal.

Si le point M est sur la droite D, l'équation du plan P devient :

$$dY + \frac{g}{\omega}Z - z\left(X\,tg\varphi + \frac{g}{\omega}\right) = 0$$

Hosted by Google

On voit ainsi que quand le point M décrit la droite D, le plan P passe par la droite D′ ayant pour équations :

$$(D') \qquad \begin{cases} dY + \frac{g}{\omega} Z = 0 - \\ X\, tg\varphi + \frac{g}{\omega} = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} X = d' \\ Y = z\, tg\varphi' \end{cases}$$

en posant

$$d' = -\frac{g}{\omega\, tg\varphi}, \quad tg\varphi' = -\frac{g}{\omega d}$$

Nous retrouvons la relation :

$$\frac{d}{tg\varphi} = \frac{d'}{tg\varphi'}$$

II. *Trouver les équations de la caractéristique d'un plan.*

Prenons l'axe hélicoïdal pour axe des z et pour origine le point où il rencontre le plan considéré.

Celui-ci a pour équation :

$$Ax + By + Cz = 0.$$

La vitesse des points de la caractéristique est contenue dans le plan. On a donc pour ces points :

$$Av_x + Bv_y + Cv_z = 0$$

ou

$$\omega (By - Ax) + Cy = 0$$

équation d'un plan parallèle à l'axe hélicoïdal et qui coupe le premier suivant la caractéristique correspondante.

III. *Trouver le lieu des points du solide dont la vitesse passe par un point fixe.*

Nous prenons toujours à l'instant considéré l'axe hélicoïdal

Hosted by Google

pour axe des z. Si la vitesse d'un point M (x,y,z), du solide passe par un point fixe $(x_0\, y_0\, z^0)$. On a :

$$\frac{x - x_0}{-\omega y} = \frac{y - y_0}{\omega x} = \frac{z - z_0}{g} = \lambda$$

En résolvant par rapport à x,y,z, on trouve des fonctions rationnelles en λ du troisième ordre.

Le lieu est donc une cubique gauche.

IV. — *Un corps solide étant mobile autour d'un point fixe si l'axe instantané est fixe dans le corps, il est fixe dans l'espace et réciproquement.*

Soient (u, v, w) (u_1, v_1, w_1), les cosinus directeurs de l'axe instantané par rapport aux axes mobiles et aux axes fixes; $u\, v\, w$ étant constants par hypothèse, il faut établir que u_1, v_1, w_1, le sont aussi. On a :

$$\begin{cases} u_1 = \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w \\ v_1 = \beta u + \beta' v + \beta'' w \\ w_1 = \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w \end{cases}$$

et comme $u\, v\, w$ sont constants :

$$\frac{du_1}{dt} = u\frac{d\alpha}{dt} + v\frac{d\alpha'}{dt} + w\frac{d\alpha''}{dt} = \frac{1}{\omega}\left(p\frac{d\alpha}{dt} + q\frac{d\alpha'}{dt} + r\frac{d\alpha''}{dt}\right)$$

Or, considérons le point M de l'axe Ox d'abscisse $+1$; ses coordonnées par rapport au système mobile sont $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$; $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha'}{dt}, \frac{d\alpha''}{dt}$ sont donc les projections sur les axes mobiles de la vitesse relative V_r de ce point par rapport au solide; cette vitesse relative est égale et opposée à la vitesse d'entraînement du point du solide qui coïncide avec M, puisque la vitesse absolue de M doit être nulle. La vitesse V_r est donc perpendiculaire à l'axe instantané et on a :

$$p\frac{d\alpha}{dt} + q\frac{d\alpha'}{dt} + r\frac{d\alpha''}{dt} = 0$$

Hosted by Google

Par suite, $\frac{du_1}{dt} = 0$. On voit de même que $\frac{dv_1}{dt} = \frac{dw_1}{dt} = 0$ et $u_1 v_1 w_1$ sont constants.

La considération du mouvement inverse montre que la réciproque est vraie. Au surplus, on peut l'établir directement comme il suit : On a, en général

$$\frac{du_1}{dt} = \alpha \frac{du}{dt} + \alpha' \frac{du}{dt} + \alpha'' \frac{dw}{dt} + u \frac{d\alpha}{dt} + v \frac{d\alpha'}{dt} + w \frac{d\alpha''}{dt}$$

et comme

$$u \frac{d\alpha}{dt} + v \frac{d\alpha'}{dt} + w \frac{d\alpha''}{dt} = 0$$

on a :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \alpha \frac{du}{dt} + \alpha' \frac{dv}{dt} + \alpha'' \frac{dw}{dt} \\ \frac{dv_1}{dt} = \beta \frac{du}{dt} + \beta' \frac{dv}{dt} + \beta'' \frac{dw}{dt} \\ \frac{dw_1}{dt} = \gamma \frac{du}{dt} + \gamma' \frac{dv}{dt} + \gamma'' \frac{dw}{dt} \end{cases}$$

Le déterminant des neuf cosinus étant différent de zéro

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dw_1}{dt} = 0$$

entraînent

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} = 0$$

11. **Démonstration analytique du théorème de Coriolis.** — Soit un point M mobile dans un solide en mouvement. (XYZ) et (xyz) désignant les coordonnées relatives et absolues de ce point, on a les relations :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y = y_0 + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z = z_0 + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{cases}$$

Hosted by Google

On en tire en différentiant deux fois :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + X\frac{d^2\alpha}{dt^2} + Y\frac{d^2\alpha'}{dt^2} + Z\frac{d^2\alpha''}{dt^2} + \alpha\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha'\frac{d^2Y}{dt^2}$$
$$+ \alpha''\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{d\alpha''}{dt}\frac{dZ}{dt}\right)$$

et deux équations analogues pour y et z.

Les premiers membres sont les composantes suivant les axes fixes de l'accélération absolue J_a du point M.

Les termes qui figurent dans les seconds membres se groupent très naturellement comme il suit :

1° Ceux qui ne contiennent pas les dérivées de XYZ: ils représentent les composantes suivant les axes fixes de l'accélération du point du solide qui, à l'instant t, coïncide avec M; cette accélération est par définition l'accélération d'entraînement J_e du point M.

2° Les termes contenant les dérivées secondes; on voit aisément qu'ils représentent les projections sur les axes fixes de l'accélération relative J_r du point M.

3° Les termes qui dépendent seulement des dérivées premières de X, Y, Z; ils représentent les projections sur les axes fixes d'un troisième vecteur J_c que nous appellerons accélération complémentaire, ou accélération de Coriolis.

L'accélération absolue J_a est la somme géométrique des 3 accélérations J_e, J_r, J_c et il nous reste à définir simplement par une propriété géométrique l'accélération complémentaire.

On a :

$$J_{cx} = 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{d\alpha''}{dt}\frac{dZ}{dt}\right)$$

Or, si on exprime le repos du point d'abscisse $+1$ situé sur l'axe Ox, on obtient :

$$\frac{d\alpha}{dt} + q\alpha'' - r\alpha' = 0 \quad \frac{d\alpha'}{dt} + r\alpha - p\alpha'' = 0 \quad \frac{d\alpha''}{dt} + p\alpha' - q\alpha = 0$$

Hosted by Google

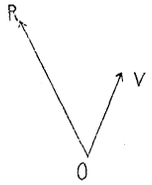
en portant dans l'expression de J_{cx} et faisant de même pour J_{cy} et J_{cz}, on trouve :

$$\begin{cases} J_{cx} = \alpha A + \alpha' B + \alpha'' C \\ J_{cy} = \beta A + \beta' B + \beta'' C \\ J_{cz} = \gamma A + \gamma' B + \gamma'' C \end{cases}$$

en posant

$$\begin{cases} A = 2\left(q\dfrac{dZ}{dt} - r\dfrac{dY}{dt}\right) \\ B = 2\left(r\dfrac{dX}{dt} - p\dfrac{dZ}{dt}\right) \\ C = 2\left(p\dfrac{dY}{dt} - q\dfrac{dX}{dt}\right) \end{cases}$$

A, B, C sont donc les projections du vecteur J_c sur les axes mobiles.



Or, par l'origine O du système mobile, menons les vecteurs OR et OV dont les extrémités aient pour coordonnées relatives (p, q, r) et $\left(\dfrac{dX}{dt}, \dfrac{dY}{dt}, \dfrac{dZ}{dt}\right)$. Le premier représente la rotation instantanée et le second la vitesse relative du point M à un parallélisme près. On voit que le vecteur J_c sera le double de la vitesse du point V dans la rotation figurée par OR, ou encore le double du moment de OR par rapport à V.

Ainsi : *L'accélération de Coriolis est le double du moment de la rotation instantanée issue du point considéré par rapport à l'extrémité de la vitesse relative.*

Hosted by Google

LIVRE V

COMPOSITION DES MOUVEMENTS D'UN SOLIDE

1. **Définitions.** — Soit un solide S en mouvement par rapport à un autre solide S_1, S_1 étant mobile par rapport à S_2, etc, et ainsi de suite jusqu'à S_{k-1} mobile par rapport à S_k. Nous devons d'ailleurs imaginer tous ces solides comme indéfinis. Le solide S aura, par rapport à S_k, un mouvement qu'on peut représenter par (SS_k) et que nous appellerons *mouvement résultant*. Les mouvements $(S_1 S_2)$, $(S_2 S_3)$ $(S_{k-1} S_k)$ seront dits *mouvements composants* ou encore *mouvements simultanés du solide* S.

Rappelons que le mouvement d'un solide à un instant t peut être considéré comme résultant d'une rotation et d'une translation, l'axe de rotation étant issu d'un point arbitraire M du solide et la translation ayant la vitesse de ce point. Nous supposons les mouvements composants définis de la sorte par une rotation et une translation et nous nous proposons d'en déduire une rotation et une translation définissant le mouvement résultant au même instant.

Observons que la vitesse d'un point du solide dans le mouvement résultant est la somme géométrique des vitesses de ce point dans les divers mouvements composants ; cela résulte de la règle de composition des vitesses. Il suit de là que dans la composition des mouvements simultanés on peut suivre n'importe quel ordre, et remplacer plusieurs d'entre eux par leur mouvement résultant.

Traitons d'abord des cas particuliers :

2. **Composition des translations.** — Supposons qu'à l'instant t tous les mouvements soient des translations de vitesses $v_1 v_2 \ldots v_k$. La vitesse d'un point quelconque M du solide S est la

Hosted by Google

somme géométrique V de v_1, v_2, v_k ; V ne dépend pas de M et, dans le mouvement résultant, tous les points ont la même vitesse. Donc :

Si les mouvements composants sont des translations, le mouvement résultant est une translation ayant pour vitesse la somme géométrique des vitesses des translations composantes.

Inversement, tout mouvement de translation peut être décomposé en plusieurs translations en nombre quelconque.

Les vitesses des translations simultanées sont simplement assujetties à avoir pour somme géométrique la vitesse de la translation donnée.

3. **Composition des rotations concourantes.** — Tous les mouvements simultanés étant à l'instant t des rotations dont les axes OR_1, OR_2, OR_k sont issus d'un même point O, prenons celui-ci pour origine de coordonnées rectangulaires et désignons par (p_i, q_i, r_i) les projections de OR_i. La vitesse d'un point quelconque M dans le mouvement composant a pour projections.

$$\begin{cases} V_x = \Sigma\,(q_i z - r_i y) = Qz - Ry \\ V_y = \Sigma\,(r_i x - p_i z) = Rx - Pz \\ V_z = \Sigma\,(p_i y - q_i x) = Py - Qx \end{cases}$$

en posant

$$\begin{cases} P = \Sigma\, p_i \\ Q = \Sigma\, q_i \\ R = \Sigma\, r_i \end{cases}$$

Cette vitesse est la même que dans la rotation issue de O et des projections P, Q, R. Par suite :

Si les mouvements composants sont des rotations concourantes, le mouvement résultant est aussi une rotation représentée par la somme géométrique des rotations composantes.

Ce théorème n'est autre que le théorème de Varignon, car la vitesse du point M, dans une rotation OR, est le moment du vecteur OR par rapport à M.

Inversement toute rotation peut être remplacée par plusieurs rotations composantes dont elle est la somme géométrique.

Hosted by Google

4. **Composition des rotations quelconques.** — Supposons que les mouvements composants soient des rotations quelconques, représentées par les vecteurs O_1R_1, O_2R_2, O_kR_k et prenons des axes rectangulaires. Si on désigne par $(l_i m_i n_i p_i q_i r_i)$ les coordonnées du vecteur rotation O_iR_i, la vitesse d'un point $M(x, y, z)$ dans le mouvement résultant a pour projections.

$$\begin{cases} V_x = \Sigma(l_i + q_i z - r_i y) = L + Qz - Ry \\ V_y = \Sigma(m_i + r_i x - p_i z) = M + Rx - Pz \\ V_z = \Sigma(n_i + p_i y - q_i x) = N + Py - Qx \end{cases}$$

en posant

$$P = \Sigma p_i \quad Q = \Sigma q_i \quad R = \Sigma r_i$$
$$L = \Sigma l_i \quad M = \Sigma m_i \quad N = \Sigma n_i$$

(PQRLMN) sont appelés *coordonnées* du système de rotations.

On voit que le mouvement résultant revient à une rotation (P, Q, R), issue de l'origine O des coordonnées et à une translation dont la vitesse a pour projections (LMN). Appelons *moment* d'un système de vecteur par rapport à un point la somme géométrique des moments de ces vecteurs par rapport au même point ; LMN sont alors les projections du moment du système de rotations par rapport au point O. Le point O étant arbitraire, nous voyons qu'en un point arbitraire O de S la rotation et la translation correspondantes s'obtiennent comme il suit :

La rotation est égale à la somme géométrique des rotations composantes.

La vitesse de translation est le moment du système de rotations par rapport au point considéré.

Cherchons les équations de l'axe hélicoïdal du mouvement résultant. Pour les points de cet axe, la vitesse est parallèle à la somme géométrique des rotations et on a

$$\frac{L + Qz - Ry}{P} = \frac{M + Rx - Pz}{Q} = \frac{N + Py - Qx}{R}$$

Par un calcul déjà fait, on trouve que la vitesse commune aux

Hosted by Google

points de l'axe hélicoïdal est

$$\frac{PL + QM + RN}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

5. **Systèmes de rotations équivalents.** — On dit que deux systèmes de rotations sont équivalents lorsqu'ils ont même mouvement résultant.

Pour que deux systèmes de coordonnées (PQRLMN) (P′Q′R′L′M′N′) soient équivalents, il faut et il suffit qu'on ait les égalités.

$$\begin{cases} L + Qz - Ry = L' + Q'z - R'y \\ M + Rx - Pz = M' + R'x - P'z \\ N + Py - Qx = N' + P'y - Q'x \end{cases}$$

quels que soient xyz. Les conditions nécessaires et suffisantes sont $L' = L$, $M' = M$, $N' = N$, $P' = P$, $Q' = Q$, $R' = R$.

Ainsi : *Pour que deux systèmes de rotations soient équivalents, il faut et il suffit que leurs coordonnées soient égales.*

En introduisant la signification de (PQR) (LMN), on a une forme géométrique de la condition d'équivalence :

Il faut et il suffit que pour les deux systèmes la somme géométrique des vecteurs rotations soit la même et que, par rapport à un point déterminé, les deux systèmes aient même moment.

6. **Systèmes de rotations particuliers.** — Examinons quelques cas particuliers.

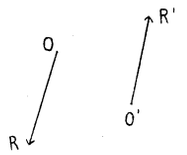
1° Pour que le mouvement résultant se réduise à une rotation, il faut et suffit que $PL + QM + RN = 0$.

En interprétant géométriquement cette condition, on voit que : *Il faut que le moment du système de rotations, par rapport à un point quelconque, soit perpendiculaire à la somme géométrique des rotations et il suffit que cette condition soit remplie pour un point déterminé.*

2° Pour que le mouvement résultant se réduise à une translation il faut et suffit que $P = Q = R = 0$.

Hosted by Google

La condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement résultant soit une translation est que la somme géométrique des rotations soit nulle.



En particulier, considérons deux rotations OR. O'R' égales parallèles, de sens contraire, mais non directement opposé. On dit qu'elles forment *un couple de rotations*. Leur somme géométrique est nulle. Donc :

Un couple de rotations équivaut à une translation.

La vitesse de translation V est celle du point O par exemple ; elle est donc perpendiculaire au plan du couple et a pour valeur ωd, d désignant la distance des deux rotations, ω leur valeur commune. Cette vitesse V s'appelle *axe* du couple ou encore *moment* du couple. On déduit alors cette conséquence de la composition des translations : *Plusieurs couples de rotations ont pour mouvement résultant une translation dont la vitesse est la somme géométrique des axes des couples composants.*

3° Supposons les rotations parallèles entre elles ; on peut toujours leur supposer la direction de Oz. On a alors :

$$p_i = q_i = n_i = 0, \quad P = Q = N = 0$$

et

$$\begin{cases} V_x = L - Ry = -R(y - y_1) \\ V_y = M + Rx = \quad R(x - x_1) \\ V_z = 0 \end{cases}$$

en posant

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{L}{R} \\ x_1 = -\dfrac{M}{R} \end{cases}$$

et en supposant $R \neq 0$. Le mouvement résultant est une rotation parallèle aux rotations données.

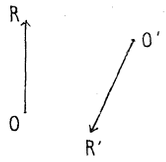
Si $R = 0$ le mouvement résultant est une translation perpendiculaire à la direction des rotations.

7. **Décomposition du mouvement d'un solide en deux rotations.** — Inversement, le mouvement d'un solide à

Hosted by Google

l'instant t peut être décomposé en plusieurs rotations d'une infinité de manières. Les projections de la vitesse d'un point quelconque (xyz) du solide sont de la forme

$$\begin{cases} V_x = L + Qz - Ry \\ V_y = M + Rx - Pz \\ V_z = N + Py - Qx \end{cases}$$



et tout système de rotations de coordonnées (P, Q, R, L, M, N) pourra être pris pour système de rotations composantes. Arrêtons-nous seulement sur la décomposition en deux rotations.

Soient $(pqrlmn)$ $(p'q'r'l'm'n')$ les coordonnées des deux vecteurs rotations OR O'R'.

On doit avoir :

$$(1) \qquad \begin{cases} P = p + p' \\ Q = q + q' \\ R = r + r' \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = l + l' \\ M = m + m' \\ N = n + n' \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} pl + qm + rn = 0 \\ p'l' + q'm' + r'n' = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Soit $(\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu)$ les coordonnées de l'axe D qui porte OR et ω la mesure de OR.

Si dans la deuxième des relations (2), on porte $p'q'r'l'm'n'$ tirés des équations (1), on a :

$$(P - p)(L - l) + (Q - q)(M - m) + (R - r)(N - n) = 0$$

$$\text{ou} \quad PL + QM + RN = pL + qM + rN + lP + mQ + nR$$
$$= \omega\,(\alpha L + \beta M + \gamma N + \lambda P + \mu Q + \nu R) = \omega K$$

Hosted by Google

et

$$\omega = \frac{PL + QM + RN}{K} \qquad (3)$$

En résumé, on se donnera la droite D qui doit porter une rotation; la grandeur de cette rotation sera déterminée par la formule (3); la deuxième rotation sera déterminée par les équations (1).

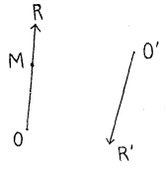
Il faut toutefois que l'on ait $K \neq 0$. Pour interpréter géométriquement cette condition, cherchons la projection sur D de la vitesse d'un point M (xyz) de cette droite. C'est :

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = \alpha(L + Qz - Ry) + \beta(M + Rx - Pz) + \gamma(N + Py - Qx)$$
$$= \alpha L + \beta M + \gamma N + P(y\gamma - z\beta) + Q(z\alpha - x\gamma) + R(x\beta - y\alpha)$$

Les coefficients de P, Q, R sont les moments $\lambda\,\mu\,\nu$ par rapport aux axes du vecteur unité porté par D ayant son origine en M. On a donc :

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = K.$$

et nous voyons en passant que la projection sur une droite D de la vitesse d'un quelconque de ses points est constante. Si $K = 0$, la droite est normale aux trajectoires de ses points. Ainsi :



On peut décomposer d'une infinité de manières le mouvement d'un solide en deux rotations; la droite qui porte l'une des rotations peut être prise arbitrairement pourvu qu'elle ne soit pas normale aux trajectoires de ses points.

Soit OR, O'R' un système de deux rotations composantes; la vitesse d'un point quelconque M de OR est normale au plan M O' R' et ce plan est, par suite, le plan polaire du point M. Les plans polaires de tous les points de OR passent donc par O'R'. Par suite :

Les droites qui portent les deux rotations sont deux droites conjuguées.

Hosted by Google

Des relations (1) et (2), on tire :

$$PL + QM + RN = pl' + qm' + rn' + lp' + mq' + nr'$$

Le second membre représente le moment de chacun des vecteurs OR, O′ R′ par rapport à l'autre, le premier membre est $v\omega$, v désignant la vitesse des points de l'axe hélicoïdal et ω la rotation. Donc :

Le moment de chaque vecteur rotation par rapport à l'autre est constant, ou encore :

Le volume du tétraèdre construit sur les deux rotations est constant.

8. Revenons maintenant au cas général où chaque mouvement composant est défini par une rotation et une translation. Les rotations se composent en une rotation OR issue d'un point arbitraire O du solide et une translation de vitesse V. Cette dernière et les translations des mouvements composants donnent une translation unique de vitesse V′. On saura donc définir le mouvemeut résultant par une rotation OR et une translation de vitesse V′.

On pourrait d'ailleurs se ramener au cas où tous les mouvements sont des rotations en remplaçant la translation de chaque mouvement composant par un couple de rotations.

Hosted by Google

DEUXIÈME PARTIE

NOTES

Hosted by Google

Hosted by Google

NOTE I

FORMULES D'OLINDE RODRIGUES.

APPLICATIONS.

1. Soient deux trièdres tirectangles T ($Oxyz$), T′ ($Ox'y'z'$) ayant même origine et même sens. Les neuf cosinus directeurs, par rapport à T des arêtes de T′, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois paramètres indépendants ; on s'en rend compte bien aisément en se reportant aux expressions de ces neuf cosinus à l'aide des trois angles d'Euler φ, ψ, θ ; il suffit d'y remplacer les sinus et cosinus de chacun de ces angles en fonction rationnelle de la tangente de l'angle moitié.

Mais le résultat de ce calcul n'est pas simple. Nous allons indiquer un procédé qui permet d'obtenir des formules rationnelles assez simples dues à Olinde Rodrigues.

Le problème revient à exprimer les coordonnées (x,y,z) d'un point M dans le système $Oxyz$ en fonction de ses coordonnées (x',y',z') dans le système $Ox'y'z'$. Nous savons qu'on peut amener T en coïncidence avec T′ par une rotation d'amplitude θ s'effectuant autour d'un certain axe OR, de cosinus directeurs $(\alpha\beta\gamma)$ par rapport au premier trièdre.

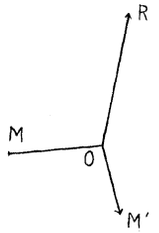
Le point M′ lié à T et que la rotation précédente fait coïncider avec M a pour coordonnées (x',y',z') par rapport au trièdre T. Nous sommes donc ramenés à résoudre la question suivante :

Etant donné un trièdre de coordonnées rectangulaires T, *on fait tourner d'un angle* θ *autour d'un axe* OR *issu de l'origine le*

Hosted by Google

point M′ *de coordonnées* (x', y', z'). *Trouver les coordonnées* (x, y, z) *de la position nouvelle* M *de ce point.*

Nous traiterons d'abord des cas particuliers.



1° Supposons $\theta = +\frac{\pi}{2}$ et OM′ perpendiculaire à OR ; OM sera normal à OM′ et à OR ; par suite on a :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ x'x + y'y + z'z = 0 \end{cases}$$

d'où on tire :

$$\frac{x}{\beta z' - \gamma y'} = \frac{y}{\gamma x' - \alpha z'} = \frac{z}{\alpha y' - \beta x'} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{\Sigma\,(\beta z' - \gamma y')^2}}$$
$$= \pm \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OM'}} = \pm 1$$

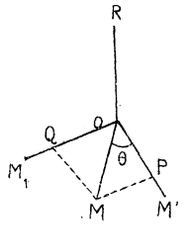
car d'après l'identité de Lagrange

$$\Sigma\,(\beta z' - \gamma y')^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (\alpha x' + \beta y' + \gamma z')^2$$
$$= x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

On verra, en amenant le trièdre direct OM′MR sur le trièdre direct $Oxyz$ que la valeur commune des rapports précédents est $+1$. On a donc :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \beta z' - \gamma y' \\ y = \gamma x' - \alpha z' \\ z = \alpha y' - \beta x' \end{cases}$$

2° Soit maintenant θ quelconque et OM′ perpendiculaire à OR.



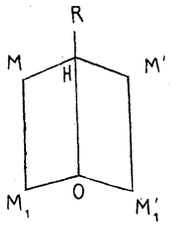
Une rotation d'amplitude $+\frac{\pi}{2}$ amènerait M′ en M_1. Décomposons le vecteur OM en deux composantes OP et OQ dirigées suivant OM′ et OM_1.

On a en grandeur et en signe $OP = OM' \cos\theta$. $OQ = OM_1 \sin\theta$. En projetant sur les axes et remarquant que les coordonnées de M_1

sont données par les formules (1) on obtient :

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x' \cos\theta + (\beta z' - \gamma y') \sin\theta \\ y = y' \cos\theta + (\gamma x' - \alpha z') \sin\theta \\ z = z' \cos\theta + (\alpha y' - \beta x') \sin\theta \end{cases}$$

3° Arrivons au cas général. Désignons par M'_1 (x'_1, y'_1, z'_1) et M_1 (x_1, y_1, z_1) les projections de M′ et M sur le plan normal en O à l'axe de rotation, et par p la mesure du vecteur OH, H étant la projection de M′ sur OR.



Les coordonnées de M_1 et M'_1 sont liées par les formules (2) et on a de plus :

$$\begin{cases} x = x_1 + p\alpha \\ y = y_1 + p\beta \\ z = z_1 + p\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x'_1 + p\alpha \\ y' = y'_1 + p\beta \\ z' = z'_1 + p\gamma \end{cases}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} x &= p\alpha + x'_1 \cos\theta + (\beta z'_1 - \gamma y'_1) \sin\theta \\ &= p\alpha (1 - \cos\theta) + x \cos\theta + (\beta z' - \gamma y') \sin\theta \end{aligned}$$

En projetant OM′ sur OR, on a :

$$p = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$$

Portons dans l'expression de x ; il vient :

$$x = (1 - \cos\theta)(\alpha x' + \beta y' + \gamma z')\alpha + x' \cos\theta + (\beta z' - \gamma y') \sin\theta$$

Par permutation circulaire de $\alpha\beta\gamma$ et $x'y'z'$ on aurait y et z.

Posons maintenant :

$$\begin{cases} tg\dfrac{\theta}{2} = t ; \\ \lambda = \alpha t \\ \mu = \beta t \\ \nu = \gamma t \end{cases}$$

Hosted by Google

On aura :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad 1-\cos\theta = \frac{2t^2}{1+t^2}.$$

et
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = t^2$$

Les formules précédentes deviennent alors :

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\,x' + 2(\lambda\mu-\nu)\,y' + 2(\lambda\nu+\mu)\,z'}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ y = \dfrac{2(\lambda\mu+\nu)\,x' + (1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2)\,y' + 2(\mu\nu-\lambda)\,z'}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ z = \dfrac{2(\lambda\nu-\mu)\,x' + 2(\nu\mu+\lambda)\,y' + (1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2)\,z'}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \end{cases}$$

Telles sont les formules d'Olinde Rodrigues ; on voit que les 3 paramètres $\lambda\mu\nu$ qui y figurent sont les projections du vecteur porté par OR et ayant pour mesure $tg\,\frac{\theta}{2}$. Ce vecteur devient infini si $\theta = \pi$ et, dans ce cas, les formules (3) deviennent illusoires. On aura des formules convenant à tous les cas en remplaçant λ,μ,ν par $\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}$; les expressions (3) deviennent alors homogènes de degré zéro par rapport aux 4 paramètres $\lambda\mu\nu\rho$; si on y fait $\rho = 0$ on obtient des formules qui représentent toutes les symétries par rapport aux droites issues de l'origine.

2. Pour définir la position d'un solide S par rapport à un trièdre trirectangle $Oxyz$, nous prendrons trois axes rectangulaires $O'x'y'z'$ liés au corps solide, les deux trièdres ayant le même sens. Soient (α,β,γ) les coordonnées de O' ; (x',y',z') les coordonnées par rapport aux axes mobiles d'un point quelconque du solide et X, Y, Z, T ses coordonnées homogènes par rapport au système fixe. On peut prendre :

$$(4)\quad \begin{cases} X = \alpha T + (\rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\,x' + 2(\lambda\mu-\nu\rho)\,y' + 2(\lambda\nu+\mu\rho)\,z' \\ Y = \beta T + 2(\mu\lambda+\nu\rho)\,x' + (\rho^2+\mu^2-\lambda^2-\nu^2)\,y' + 2(\mu\nu-\lambda\rho)\,z' \\ Z = \gamma T + 2(\lambda\nu-\mu\rho)\,x' + 2(\nu\mu+\lambda\rho)\,y' + (\rho^2+\nu^2-\lambda^2-\mu^2)\,z' \\ T = \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2 \end{cases}$$

Hosted by Google

La position du solide sera déterminée par les 7 paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \lambda\ \mu, \nu, \rho$; les quatre derniers peuvent d'ailleurs varier proportionnellement sans que le solide se déplace.

Les formules précédentes se prêtent très facilement à la définition et à l'étude des mouvements d'un solide.

On aura tous les mouvements possibles en prenant pour $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \rho$ des fonctions arbitraires d'une même variable t.

Si ces fonctions sont algébriques, tous les points décrivent des courbes algébriques et le mouvement est dit un mouvement *algébrique*.

Un mouvement algébrique est appelé *unicursal* si tous les points du solide décrivent des courbes unicursales. Il en sera ainsi si on prend pour les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \rho$ des fonctions rationnelles de t. En particulier, si $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \rho$ sont du premier degré en t le mouvement est unicursal et les trajectoires sont en général des cubiques gauches.

On peut supposer $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \rho$ fonctions de k paramètres indépendants ($k < 5$); on a alors *un mouvement à* k *paramètres* et dit que le solide possède *un degré de liberté* égal à k. De même qu'un mouvement a un paramètre, un mouvement à plusieurs paramètres pourra être algébrique, unicursal.

Si on assujettit 3 points du solide à décrire trois plans quelconques, on obtiendra pour αT, βT, γT des fonctions homogènes du second degré, en λ, μ, ν, ρ et X, Y, Z, T seront des fonctions homogènes de second degré en λ, μ, ν, ρ; on aura alors un mouvement à 3 paramètres unicursal. En exprimant qu'un nouveau point du solide décrit un plan on établira entre λ, μ, ν, ρ une relation homogène $f(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0$ du second degré; le mouvement sera à deux paramètres et à tout point de la quadrique $f(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0$ correspondra une position du solide.

On se rend compte ainsi que le mouvement est unicursal et qu'il comprend une infinité de mouvements à un paramètre dans lesquels toutes les trajectoires sont des coniques; ces mouvements correspondent aux génératrices rectilignes de la quadrique.

Enfin, en écrivant qu'un cinquième point décrit un cinquième plan, on établit une nouvelle relation homogène $f_1(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0$ du second degré. Le mouvement est alors à un paramètre et, à

Hosted by Google

chaque position du solide correspond un point d'une biquadratique gauche ; on voit ainsi que ce mouvement pourra être défini à l'aide des fonctions elliptiques.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces généralités qu'on trouvera développées dans les *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs (Note III de M. Darboux), nous bornant à faire l'étude d'un mouvement particulier à deux paramètres.

3. A, B, C *étant 3 points pris sur les axes* $O'x'$ $O'y'$ $O'z'$ *liés au solide, à la distance* a *de l'origine* O', *on suppose que les points* A, B, C *et le centre* D *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $O'ABC$ *décrivent respectivement les plans*

$$y+z=0 \quad z+x=0 \quad x+y=0 \quad x+y+z+\frac{a}{2}=0$$

Etudier le mouvement du solide.

Nous conservons les notations précédentes. Les coordonnées des points A,B,C,D dans le système mobile sont respectivement

$$(a,o,o) \quad (o,a,o) \quad (o,o,a) \quad \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

En exprimant à l'aide des formules (4) que ces points décrivent :

$$Y+Z=0, \; Z+X=0, \; X+Y=0, \; X+Y+Z+\frac{a}{2}T=0$$

on obtient les relations :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\beta+\gamma)\,T+2a\,(\mu\lambda+\nu\rho+\lambda\nu-\mu\rho)=0 \\ (\gamma+\alpha)\,T+2a\,(\lambda\mu+\nu\mu+\lambda\rho-\nu\rho)=0 \\ (\alpha+\beta)\,T+2a\,(\lambda\nu+\mu\rho+\mu\nu-\lambda\rho)=0 \\ \left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{a}{2}\right)T+\frac{a}{2}\,(4\rho^2-T+4\lambda\mu+4\mu\nu+4\nu\lambda)=0 \end{array} \right.$$

Si on ajoute ces équations après avoir multiplié la dernière par -2, on trouve $\rho^2=0$; on peut dire que la quadrique dont les points correspondent aux positions du solide est un plan double

Hosted by Google

rejeté à l'infini ; on tire ensuite des relations (5)

$$\begin{cases} \alpha\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = -2a\,\mu\nu \\ \beta\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = -2a\,\nu\lambda \\ \gamma\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = -2a\,\lambda\mu \end{cases}$$

et les formules qui définissent notre mouvement à deux paramètres sont :

$$(6) \qquad \begin{cases} X = -2a\mu\nu + (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)\,x' + 2\lambda\mu\,y' + 2\lambda\nu\,z' \\ Y = -2a\nu\lambda + 2\mu\lambda\,x' + (\mu^2 - \lambda^2 - \nu^2)\,y' + 2\mu\nu\,z' \\ Z = -2a\lambda\mu + 2\lambda\nu\,x' + 2\nu\mu\,y' + (\nu^2 - \lambda^2 - \mu^2)\,z' \\ T = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \end{cases}$$

Les seconds membres sont homogènes du second degré en λ, μ, ν. Donc : *Tous les points décrivent des surfaces de Steiner.*

Nous supposons connues les principales propriétés de ces surfaces. Il y a, comme on sait, une infinité de coniques tracées sur une surface de Steiner : on les obtient en la coupant par ses plans tangents. Si un point du solide décrit une conique sur sa surface de Steiner, on aura un mouvement à un paramètre défini par une relation linéaire et homogène en λ, μ, ν et, par suite, tous les autres points décrivent des coniques sur leur surface de Steiner.

Arrêtons-nous particulièrement sur la surface S' décrite par O'. Elle est représentée par les équations.

$$\begin{cases} X = -2a\mu\nu \\ Y = -2a\nu\lambda \\ Z = -2a\lambda\mu \\ T = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \end{cases}$$

Par élimination de λ, μ, ν, on obtient :

$$Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2 + 2aXYZ\,T = 0$$

Cette équation montre que les axes des coordonnées Ox Oy Oz sont les trois droites doubles de la surface. Celle-ci admet

Hosted by Google

Ox Oy Oz pour axes de symétrie binaire et les quatre droites $x = \varepsilon y = \varepsilon' z$ $(\varepsilon = \pm 1 \quad \varepsilon' = \pm 1)$ pour axes de symétrie ternaire.

Cherchons les coniques de contact.

Un plan $Ax + By + Cz - aT = 0$ coupe la surface suivant une courbe unicursale du quatrième ordre définie par la relation.

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2A\mu\nu + 2B\nu\lambda + 2C\lambda\mu = 0$$

Cette courbe est formée de deux coniques confondues si le premier membre est carré parfait; ce carré parfait sera nécessairement de la forme $(\lambda + \varepsilon\mu + \varepsilon'\nu)^2$; $(\varepsilon = \pm 1 \quad \varepsilon' = \pm 1)$ et on aura :

$$A = \varepsilon\varepsilon' \quad B = \varepsilon' \quad C = \varepsilon$$

Il y a donc quatre coniques de contact situées dans les quatre plans $\varepsilon\varepsilon' x + \varepsilon' y + \varepsilon z - a = 0$; elles correspondent aux quatre relations linéaires $\lambda + \varepsilon\mu + \varepsilon'\nu = 0$.

On se rend compte facilement que les 4 plans qui précèdent forment un tétraèdre régulier (T) ayant pour centre le point O. Les axes Ox, Oy, Oz, sont les droites joignant les milieux des arêtes. Les hauteurs de ce tétraèdre sont les axes de symétrie ternaire de la surface. Les coniques de contact seront les cercles inscrits dans les quatre faces, car elles doivent se reproduire par une rotation de 120° dans leur plan.

On peut donner une autre définition du mouvement qui nous occupe, en partant de la surface S′ lieu de O′.

Puisque $\rho = 0$ le trièdre $O'x'y'z'$ a même orientation que le symétrique de $Oxyz$ par rapport à une certaine droite OR de coefficients directeurs $\lambda\mu\nu$. Or (α, β, γ) désignant les coordonnées de O′ on a :

$$\alpha\lambda = \beta\mu = \gamma\nu$$

L'axe OR pourra, par suite, se déduire du rayon vecteur OO′ en prenant les symétriques des 3 plans OxO', OyO', OzO' par rapport aux plans bissecteurs du trièdre $Oxyz$; ces trois nouveaux plans passent par une même droite qui est OR.

Le point O′ étant donné, on saura donc trouver la position correspondante du trièdre $Ox'y'z'$ par une translation et une symétrie par rapport à une droite facile à construire.

Hosted by Google

Dans le mouvement précédent, il y a quatre points, les points A, B, C, D qui décrivent des plans. Cherchons s'il n'y en a pas d'autres. Pour que le point M (x', y', z') du solide décrive le plan $AX + BY + CZ + DT = 0$, il faut et il suffit qu'en remplaçant dans le premier membre de l'équation du plan X, Y, Z, T par leurs expressions (6) on obtienne une fonction homogène en λ, μ, ν identiquement nulle. Les conditions sont :

$$(7) \qquad \begin{cases} Ax' - By' - Cz' + D = 0 \\ By' - Cz' - Ax' + D = 0 \\ Cz' - Ax' - By' + D = 0 \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} Cy' + Bz' - aA = 0 \\ Az' + Cx' - aB = 0 \\ Bx' + Ay' - aC = 0 \end{cases}$$

Des relations (7) on tire

$$Ax' = By' = Cz' = D$$

Supposons d'abord $x'y'z' \neq 0$; alors on ne peut avoir $D = 0$ sans cela A, B, C, D seraient tous nuls. En remplaçant dans les équations (8) A, B, C par $\frac{D}{x'}$ $\frac{D}{y'}$ $\frac{D}{z'}$ et divisant par D on a :

$$x'^2(y'^2 + z'^2) = y'^2(z'^2 + x'^2) = z'^2(x'^2 + y'^2) = ax'y'z'$$

ce qui exige d'abord $x'^2 = y'^2 = z'^2$. On satisfera à ces égalités en prenant

$$\begin{cases} x' = u & \varepsilon = \pm 1 \\ y' = \varepsilon u & \varepsilon' = \pm 1 \\ z' = \varepsilon' u & \end{cases}$$

On aura ensuite

$$2u^4 = a\varepsilon\varepsilon' u^3$$

et

$$u = \frac{a}{2}\varepsilon\varepsilon'$$

Hosted by Google

Nous trouvons ainsi quatre points qui décrivent des plans, les points :

$$\begin{cases} x' = \frac{a}{2}\varepsilon\varepsilon' \\ y' = \frac{a}{2}\varepsilon' \\ z' = \frac{a}{2}\varepsilon \end{cases}$$

Ces points sont le point D et ses symétriques par rapport aux axes du trièdre $O'x'y'z'$. Les plans correspondants sont les plans :

$$\frac{X}{x'} + \frac{Y}{y'} + \frac{Z}{z'} + T = 0$$

ou

$$\varepsilon\varepsilon' x + \varepsilon' y + \varepsilon z + \frac{a}{2} = 0$$

Ces plans forment un tétraèdre régulier (T_1) de centre O homothétique dans le rapport $-\frac{1}{2}$ du tétraèdre (T) ayant pour faces les plans des cercles de contact de la surface S'.

Examinons maintenant le cas où $x'y'z' = 0$; on ne peut avoir

$$x' = y' = z' = 0$$

car les relations (7) et (8) donneraient

$$A = B = C = D = 0$$

cela était à prévoir puisque le point O' ne décrit pas un plan ; on n'a pas non plus une seule coordonnée nulle ; si on avait, par exemple, $x'y' \neq 0$ et $z' = 0$, les relations (7) donneraient

$$D = A = B = 0$$

et les relations (8)

$$C = 0$$

Soit donc par exemple $x' = y' = 0 \quad z' \neq 0$; d'après (7) on aura :

$$D = 0 \quad C = 0$$

Hosted by Google

et les relations (8) deviennent

$$Bz' - aA = 0 \qquad Az' - aB = 0$$

On aura, en éliminant A et B

$$z'^2 = a^2$$

On retrouve ainsi que le point C décrit le plan $x + y = 0$; on voit en outre que le symétrique de C, par rapport à O′ décrit le plan $x - y = 0$. De même on établit que les symétriques de A et B, par rapport à O′ décrivent les plans $y - z = 0$ $x - z = 0$.

Il y a donc en tout 10 points du solide qui décrivent des plans. Si (T′) est le tétraèdre avec lequel (T) vient coïncider quand on amène $Oxyz$ sur $O'x'y'z'$, les dix points en question sont les milieux des arêtes de (T′) et les pieds des hauteurs de ce tétraèdre. Les pieds des hauteurs décrivent les faces du tétraèdre (T_1) et les milieux des arêtes décrivent les six plans passant par chaque arête de (T_1) et le milieu de l'arête opposée.

Hosted by Google

Hosted by Google

NOTE II

LE DÉPLACEMENT CONSIDÉRÉ COMME HOMOGRAPHIE ET TRANSFORMATION PONCTUELLE.

---

1. Soit une homographie plane transformant le point M de coordonnées homogènes (x, y, z) en un point M' (x', y', z'). On a :

$$(1) \qquad \begin{cases} hx' = ax + by + cz \\ hy' = a'x + b'y + c'z \\ hz' = a''x + b''y + c''z \end{cases}$$

h désignant un facteur de proportionnalité.

Le point M coïncidera avec son homologue, si ses coordonnées vérifient :

$$\frac{ax + by + cz}{x} = \frac{a'x + b'y + c'z}{y} = \frac{a''x + b''y + c''z}{z}$$

ou

$$(2) \qquad \begin{cases} (a - \rho)\, x + by + cz = 0 \\ a'x + (b' - \rho)\, y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + (c'' - \rho)\, z = 0 \end{cases}$$

ρ étant la valeur commune des trois rapports précédents.

Comme x, y, z ne sont pas tous nuls, l'inconnue auxiliaire ρ doit être racine de l'équation :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a - \rho & b & c \\ a' & b' - \rho & c' \\ a'' & b'' & c'' - \rho \end{vmatrix} = 0$$

Hosted by Google

Dans le cas général, l'équation (3) a trois racines distinctes auxquelles correspondent trois points doubles distincts formant un triangle. On conçoit que si les coefficients a, b, c, etc , ont des valeurs particulières, il pourra ne plus en être ainsi ; nous dirons alors que l'Homographie est *singulière*. Par exemple, la symétrie par rapport à une droite est une homographie singulière, car tous les points de l'axe de symétrie sont des points doubles.

2. Cela posé, remarquons qu'un déplacement dans le plan amenant le point M en M′ est une homographie particulière définie en coordonnées rectangulaires par des formules telles que

$$(1') \qquad \begin{cases} hx' = az + x \cos \theta - y \sin \theta \\ hy' = bz + x \sin \theta + y \cos \theta \\ hz' = z \end{cases}$$

Cherchons les points doubles de cette homographie. Les équations (2) sont actuellement :

$$(2') \qquad \begin{cases} (\cos \theta - \rho)\, x - y \sin \theta \qquad + az = 0 \\ \sin \theta\; x + y (\cos \theta - \rho) + bz = 0 \\ (1 - \rho)\, z = 0 \end{cases}$$

et l'équation (3) devient :

$$(\rho - 1) \quad [(\cos \theta - \rho)^2 + \sin^2 \theta] = 0$$

A la racine $\rho = 1$ correspond un point réel à distance finie intersection des deux droites :

$$\begin{cases} (\cos \theta - 1)\, x - y \sin \theta + az = 0 \\ \sin \theta\, x + y (\cos \theta - 1) + bz = 0 \end{cases}$$

On retrouve ainsi que le déplacement revient à une rotation autour d'un point.

Aux deux racines imaginaires conjuguées $\cos \theta \pm i \sin \theta$ correspondent les deux points

$$\begin{cases} z = 0 \\ y \pm ix = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire les points cycliques du plan. Ainsi :

Hosted by Google

Un déplacement dans le plan est une homographie non singulière ayant pour points doubles le centre de rotation et les deux points cycliques.

Nous supposons bien entendu $\theta \neq 0$, c'est-à-dire que le mouvement ne soit pas une translation. Dans ce dernier cas, tous les points de la droite de l'infini sont des points doubles et l'homographie est singulière.

3. Inversement cherchons les homographies à coefficients réels conservant les points cycliques. Elles n'altèrent pas la droite de l'infini et par suite pour $z = 0$ on aura :

$$z' = 0$$

Les formules de transformation peuvent donc être prises sous la forme :

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = az + \alpha x + \beta y \\ y' = bz + \alpha' x + \beta' y \\ z' = z \end{cases}$$

Pour $z = 0$ $y = \pm ix$ on doit avoir

$$z' = 0 \quad y' = \pm ix'$$

Ces deux conditions se ramènent à

$$i = \frac{\alpha' + \beta' i}{\alpha + \beta i}$$

ou à

$$\alpha' = -\beta, \quad \beta' = \alpha$$

En posant :

$$\alpha = r \cos\theta \quad \beta = -r \sin\theta \quad a = ra' \quad b = rb'$$

on obtient :

$$\begin{cases} x' = r\,(a'z + x \cos\theta - y \sin\theta) \\ y' = r\,(b'z + x \sin\theta + y \cos\theta) \\ z' = z \end{cases}$$

D'après ces formules, on voit que : *Toute Homographie à coefficients réels, conservant les points cycliques du plan revient à*

Hosted by Google

un déplacement suivi d'une Homothétie par rapport à l'origine.

On se rend compte d'ailleurs facilement que toute Homothétie est une homographie singulière ayant pour points doubles le centre d'Homothétie et tous les points de la droite de l'infini ;

4. Passons maintenant au déplacement dans l'espace. On sait qu'il peut s'obtenir par une rotation autour d'un axe suivie d'une translation parallèle à cet axe. Si celui-ci est pris pour axe des z dans un système de coordonnées rectangulaires, les coordonnées homogènes (x,y,z,t) et (x',y',z',t') des points M et M′ qui se correspondent en vertu du déplacement sont liées par les formules.

$$(5)\qquad \begin{cases} hx' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ hy' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ hz' = z + at \\ ht' = t \end{cases}$$

h désignant un facteur de proportionnalité. La correspondance entre M et M′ est donc Homographique.

Si on considère une homographie dans l'espace, on voit, comme pour le plan qu'elle admet en général, 4 points doubles distincts formant un tétraèdre. Pour certaines Homographies particuliéres, il peut ne plus en être ainsi; nous dirons qu'elles sont *singulières*. Par exemple, la symétrie, par rapport à un plan, est une Homographie singulière.

Revenons à l'homographie définie par les formules (5) et cherchons ses points doubles. Ils vérifient

$$\frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x} = \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{y} = \frac{z+at}{z} = \frac{t}{t} = \rho$$

ou

$$\begin{cases} x(\cos\theta - \rho) - y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta + y(\cos\theta - \rho) = 0 \\ z(1-\rho) + at = 0 \\ (1-\rho)\,t = 0 \end{cases}$$

l'inconnue auxiliaire ρ étant racine de l'équation

$$(\rho - 1)^2 \quad [(\cos\theta - \rho)^2 + \sin^2\theta] = 0$$

Hosted by Google

A $\rho = 1$ correspond le point $t = x = y = 0$, c'est-à-dire le point à l'infini sur Oz et aux deux autres racines $\cos\theta \pm i \sin\theta$ correspondent les points cycliques du plan des xy. Donc : *Le déplacement dans l'espace est une homographie singulière admettant trois points doubles : les points cycliques d'un plan et le point à l'infini dans la direction normale à ce plan.*

Il n'y a donc pas de point double à distance finie en supposant bien entendu le déplacement quelconque; s'il se réduisait à une rotation, tous les points de l'axe de rotation seraient des points doubles; si le déplacement est une translation, tous les points du plan de l'infini sont des points doubles.

La propriété précédente n'est pas d'ailleurs caractéristique du déplacement. Si on cherche les Homographies qui conservent les points cycliques du plan des xy et le point à l'infini sur Oz ($Oxyz$ étant trirectangle) on trouve sans difficulté :

$$\begin{cases} x' = r\,(a + x\cos\theta - y\sin\theta) \\ y' = r\,(b + x\sin\theta + y\cos\theta) \\ z' = r'\,(c + z) \\ t' = t \end{cases}$$

Tant que r' est différent de 1, on a une homographie non singulière ayant un point double à distance finie ; quand r' tend vers 1, ce point double vient se confondre avec le point à l'infini sur Oz.

5. Le déplacement dans l'espace est une homographie n'altérant pas le cercle imaginaire de l'infini; en effet, un déplacement conserve le plan de l'infini et change une sphère en une autre sphère. Inversement, cherchons les Homographies laissant invariant le cercle imaginaire de l'infini; le plan de l'infini devant se correspondre à lui-même, elles seront de la forme :

$$\begin{cases} x' = At + ax + a'y + a''z \\ y' = Bt + bx + b'y + b''z \\ z' = Ct + cx + c'y + c''z \\ t' = t \end{cases}$$

Hosted by Google

En outre pour $t = o \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$, on doit avoir

$$t' = o \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

c'est-à-dire que sous la condition $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ on doit avoir

$$(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 + (cx + c'y + c''z)^2 = 0$$

ce qui entraîne les relations :

$$(6) \quad a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = r^2$$

$$(7) \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = a''a + b''b + c''c = aa' + bb' + cc' = 0$$

Posons

$a = r\alpha, \quad b = r\beta, \quad c = r\gamma$, etc; $\quad A = rx_o, \quad B = ry_o, \quad C = rz_o$

Les formules précédentes deviennent en revenant aux coordonnées absolues

$$(8) \qquad \begin{cases} x' = r\,(x_o + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z) \\ y' = r\,(y_o + \beta x + \beta' y + \beta'' z) \\ z' = r\,(z_o + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) \end{cases}$$

Les $\alpha\beta\gamma$, etc., vérifient les relations

$$(6') \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1$$

$$(7') \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

et, en outre, on peut choisir le signe de r de façon que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

soit égal à $+1$.

α, β, γ, etc., sont donc les cosinus directeurs des axes d'un trièdre trirectangle superposable au trièdre de coordonnées et les formules (8) montrent que : *Toute transformation homographique conservant le cercle imaginaire de l'infini revient à un déplacement suivi d'une Homothétie par rapport à l'origine.*

Hosted by Google

6. Un déplacement dans le plan amenant un point M (x,y) en un point M′ (x',y') peut être regardé comme une transformation ponctuelle qui laisse invariable la fonction $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$ des coordonnées de deux points quelconques ; cela résulte de l'égalité $\overline{M'M'_1}^2 = \overline{MM_1}^2$; cette propriété appartient aussi à la symétrie par rapport à une droite. Pareillement un déplacement dans l'espace et une symétrie par rapport à un plan sont des transformations ponctuelles laissant invariable la fonction $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$ des coordonnées de deux points quelconques M et M_1.

Nous allons voir que cette propriété caractérise le déplacement et la symétrie parmi les transformations ponctuelles. Nous traiterons uniquement du problème relatif à l'espace le cas du plan ne présentant aucune difficulté.

Tout d'abord, si une transformation ponctuelle du point M (x,y,z) en M′ (x',y',z') laisse invariante la fonction précédente x',y',z' seront des fonctions linéaires de x,y,z. En effet, en prenant M_1 infiniment voisin de M, on aura :

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ce qui entraîne les conditions :

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum \left(\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 = 1 \\ \sum \left(\dfrac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 = 1 \\ \sum \left(\dfrac{\partial x'}{\partial z}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial x'}{\partial y} \dfrac{\partial x'}{\partial z} = 0 \\ \sum \dfrac{\partial x'}{\partial z} \dfrac{\partial x'}{\partial x} = 0 \\ \sum \dfrac{\partial x'}{\partial x} \dfrac{\partial x'}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

En différentiant les identités (10) par rapport à x, y, z respec-

Hosted by Google

tivement et posant

$$A = \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial^2 x'}{\partial y \partial z}, \quad B = \sum \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial^2 x'}{\partial z \partial x} \quad C = \sum \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial y}$$

on obtient :

$$B + C = C + A = A + B = 0$$

et par suite :

$$A = B = C = 0$$

Montrons par exemple que les trois dérivées partielles $u = \frac{\partial^2 x'}{\partial y \partial z}$ $v = \frac{\partial^2 y'}{\partial y \partial z}$ $w = \frac{\partial^2 z'}{\partial y \partial z}$ sont identiquement nulles.

En différentiant par rapport à z et y les deux dernières identités (9) et tenant compte de $A = 0$, on a :

$$\begin{cases} \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \; u = 0 \\ \sum \frac{\partial x'}{\partial y} \; u = 0 \\ \sum \frac{\partial x'}{\partial z} \; u = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ces 3 équations homogènes en u, v, w est différent de zéro, car son carré, en vertu des relations (9) et (10) est égal à $+1$. On a donc $u = v = w = 0$.

Reste à démontrer que les dérivées partielles telles que $\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}$ sont aussi identiquement nulles.

En différentiant par rapport à x la première des identités (9) et les deux dernières identités (10), on a :

$$\begin{cases} \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \; \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0 \\ \sum \frac{\partial x'}{\partial y} \; \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0 \\ \sum \frac{\partial x'}{\partial z} \; \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Hosted by Google

Ces équations homogènes, par rapport aux 3 dérivées partielles, ont un déterminant différent de zéro et par suite :

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} = 0$$

En résumé, toutes les dérivées partielles du second ordre des fonctions x', y', z' de x, y, z sont identiquement nulles.
et on aura :

$$(11) \qquad \begin{cases} x' = x_0 + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ y' = y_0 + \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ z' = z_0 + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ etc., désignant des constantes. Les relations (9 et (10) deviennent :

$$(9') \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1$$

$$(10') \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

est égal à $+1$ les formules (11) définissent un déplacement.

Si le déterminant est égal à -1 on voit que le point M′ transformé de M pourra s'obtenir en faisant subir un déplacement au symétrique de M par rapport à l'un quelconque des 3 plans de coordonnées rectangulaires.

9. En considérant une rotation autour d'un axe issu de l'origine, amenant $M(x, y, z)$ en $M'('x, y', z')$, comme une substitution linéaire homogène laissant invariante la fonction $x^2 + y^2 + z^2$ on retrouve assez simplement les formules d'Olinde Rodrigues. On doit avoir :

$$x'^2 - x^2 + y'^2 - y^2 + z'^2 - z^2 = 0$$

ou $\quad (12) \qquad XX' + YY' + ZZ' = 0$

Hosted by Google

en posant

$$\begin{cases} X = x' + x, & X' = x' - x \\ Y = y' + y, & Y' = y' - y \\ Z = z' + z, & Z' = z' - z \end{cases}$$

X', Y', Z' seront des fonctions linéaires et homogènes de X, Y, Z soit :

$$\begin{cases} X' = AX + BY + CZ \\ Y' = A'X + B'Y + C'Z \\ Z' = A''X + B''Y + C''Z \end{cases}$$

La relation (12) étant satisfaite quels que soient X, Y, Z, on doit avoir :

$$A = B' = C'' = 0 \quad C' + B'' = A'' + C = B + A' = 0$$

En posant

$$B'' = -C' = \lambda \quad C = -A'' = \mu \quad A' = -B = \nu$$

on aura donc :

$$\begin{cases} x' - x = \mu(z' + z) - \nu(y' + y) \\ y' - y = \nu(x' + x) - \lambda(z' + z) \\ z' - z = \lambda(y' + y) - \mu(x' + x) \end{cases}$$

ou (13)
$$\begin{cases} x' + \nu y' - \mu z' = x + \mu z - \nu y \\ y' + \lambda z' - \nu x' = y + \nu x - \lambda z \\ z' + \mu x' - \lambda y' = z + \lambda y - \mu x \end{cases}$$

Il suffit de résoudre, par rapport à $x'\,y'\,z'$, pour retrouver les formules d'Olinde Rodrigues. On fera rapidement le calcul en adjoignant aux équations (13) la relation :

(14) $$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = \lambda x + \mu y + \nu z$$

qui en est une conséquence. On aura x' par exemple en multipliant les équations (13) par 1, $-\nu, \mu$ respectivement, l'équation (14) par λ et ajoutant.

Hosted by Google

Si on cherche les points doubles de la transformation à l'aide des relations (13), on trouve tout de suite qu'il y en a une infinité situés sur la droite $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$. Ce sont là les équations de l'axe de rotation.

En prenant $X = x' - x$, $X' = x' + x$, etc.; la transformation ne serait plus une simple rotation. On vérifie sans peine que, dans ce cas, l'origine est le seul point double. Comme on passe d'ailleurs du premier cas au second en changeant x, y, z en $-x$, $-y$, $-z$, on voit que cette deuxième transformation est une symétrie par rapport à l'origine accompagnée d'une rotation ou, ce qui revient au même, une symétrie par rapport à un plan passant par l'origine accompagnée d'une rotation autour d'un axe normal au plan.

Hosted by Google

Hosted by Google

NOTE III

LE COMPLEXE LINÉAIRE.

APPLICATION A LA CINÉMATIQUE.

---

1. **Coordonnées de droite.** — On sait qu'une droite Δ peut être représentée dans l'espace par les équations.

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma}$$

x, y, z désignant les coordonnées d'un point quelconque de la droite et α,β,γ des coefficients directeurs. Les plans projetant la droite sur les plans de coordonnées ont pour équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} \gamma Y - \beta Z = \gamma y - \beta z = \lambda \\ \alpha Z - \gamma X = \alpha z - \gamma x = \mu \\ \beta X - \alpha Y = \beta x - \alpha y = \nu \end{cases}$$

Les six quantités $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu$, introduites par Plücker s'appellent les *coordonnées* de la droite Δ. On voit qu'elles ne sont déterminées qu'à un facteur de proportionnalité près et vérifient la relation

$$(2) \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$

Réciproquement, six quantités $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu$ satisfaisant à l'égalité (2) définissent une droite. En effet, les 3 plans représentés par

Hosted by Google

les équations (1) passent par une même droite Δ en vertu de la relation (2) et Δ a pour coordonnées $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu$.

Les coordonnées étant rectangulaires, on voit quelle est la signification des six coordonnées de droite: α,β,γ sont les projections d'un vecteur AB porté par Δ et ayant pour origine le point (x,y,z); λ,μ,ν sont les moments de ce vecteur par rapport aux axes; en d'autres termes, $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu$ sont les coordonnées du vecteur AB.

Si la droite Δ est définie par deux points M (x,y,z), M' (x',y',z') on peut prendre

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha = x - x' \\ \beta = y - y' \\ \gamma = z - z' \end{cases}$$

et par suite

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda = zy' - yz' \\ \mu = xz' - zx' \\ \nu = yx' - xy' \end{cases}$$

Les coordonnées étant homogènes, on remplacera les formules (3) par les suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = xt' - x't \\ \beta = yt' - y't \\ \gamma = zt' - z't \end{cases}$$

Si la droite Δ est définie comme intersection de deux plans P (u,v,w), P' (u',v',w') en éliminant X, Y, Z entre les équations des deux plans

$$\begin{cases} u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z} + 1 = 0 \\ u'\mathrm{X} + v'\mathrm{Y} + w'\mathrm{Z} + 1 = 0 \end{cases}$$

on obtient les équations des plans projetant Δ sur les plans de coordonnées. Par comparaison avec les équations (1), on voit

Hosted by Google

qu'on peut prendre

$$(3') \qquad \begin{cases} \lambda = u - u' \\ \mu = v - v' \\ \nu = w - w' \end{cases}$$

$$(4') \qquad \begin{cases} \alpha = wv' - vw' \\ \beta = uw' - wu' \\ \gamma = vu' - uv' \end{cases}$$

et si les plans sont définis par des coordonnées homogènes (u, v, w, h), on substituera aux formules (3') les suivantes :

$$\begin{cases} \lambda = uh' - u'h \\ \mu = vh' - v'h \\ \nu = wh' - w'h \end{cases}$$

2 **Complexes.** — En assujettissant une droite à une condition géométrique, on obtient, puisque les équations (1) sont homogènes en $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ une relation homogène

$$(5) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu) = 0$$

entre les coordonnées de cette droite. On dit que toutes les droites Δ, satisfaisant à cette condition, forment un *complexe* ayant pour *équation* l'égalité (5).

Les droites du complexe passant par un point quelconque $M'(x', y', z')$ de l'espace forment un cône dont l'équation ponctuelle s'obtient en remplaçant dans l'équation du complexe $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ par leurs expressions (3), (4) et regardant x, y, z comme les coordonnées courantes. Ce cône est le *cône du complexe* relatif au point M'.

Corrélativement les droites du complexe situées dans un plan quelconque $P'(u', v', w')$ enveloppent une courbe dont l'équation tangentielle s'obtient en remplaçant dans (5) $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$ par leurs expressions (3') et (4') et traitant u, v, w comme les coordonnées tangentielles courantes. La courbe précédente est appelée *courbe du complexe* relative au plan P'.

Si on effectue un changement de coordonnées, on peut se rendre compte aisément que les anciennes coordonnées d'une droite sont linéaires et homogènes par rapport aux nouvelles.

Hosted by Google

Cette remarque permet de classer les complexes en complexes algébriques, et complexes transcendants, et de définir *l'ordre* d'un complexe algébrique. Cet ordre est le degré invariant de l'équation (5) du complexe, supposée mise sous forme rationnelle et entière. Ce que nous avons dit sur la manière d'obtenir les équations ponctuelle et tangentielle du cône et de la courbe du complexe montre immédiatement que :

Le degré du cône du complexe, et la classe de la courbe du complexe sont égaux à l'ordre du complexe.

3. **Complexe linéaire.** — Le plus simple parmi les complexes algébriques est le complexe ayant une équation de la forme :

$$A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma = 0 \tag{6}$$

A, B, C.... N désignant des coefficients quelconques. On l'appelle *complexe linéaire.*

Si A,B,C, etc., vérifient $AL + BM + CN = 0$ A,B,C,L,M,N sont les coordonnées d'une droite D. Si on se reporte à l'expression du moment d'un vecteur porté par D par rapport à un vecteur situé sur Δ, on voit que la relation (6) est la condition nécessaire et suffisante pour que Δ rencontre D. Le complexe linéaire est alors formé par toutes les droites qui rencontrent D et on dit qu'il est *spécial.* Dans tout ce qui suit, nous supposons le complexe non spécial, c'est-à-dire $AL + BM + CN \neq 0$.

Une conséquence immédiate de la relation (6) est la suivante :

Cinq droites quelconques déterminent un complexe linéaire et un seul.

Cette relation étant du premier degré, il en résulte que le cône du complexe est du premier degré et la courbe du complexe de la première classe. En d'autres termes :

Les droites d'un complexe linéaire qui passent par un même point M *sont situées dans un plan* P *et corrélativement.*

Les droites d'un complexe linéaire, situées dans un plan P *passent par un même point* M.

Hosted by Google

Le plan P est dit le *plan polaire* ou le *plan focal* du point M et M le *pôle* ou le *foyer* du plan P.

La propriété précédente et sa corrélative suffisent pour faire toute la théorie du complexe linéaire. En reprenant les raisonnements des numéros 11, 12, 13 (CHAPITRE III. LIVRE III), on établit les théorèmes suivants que nous ne faisons qu'énoncer :

I. *Les plans polaires de tous les points d'un plan passent par le pôle de ce plan* et corrélativement : *Les pôles de tous les plans, passant par un point sont dans le plan polaire de ce point.*

II. *Les plans polaires de tous les points d'une droite* D *passent par une droite* D′ *qui est aussi le lieu des pôles des plans passant par* D. Les droites D et D′ entre lesquelles il y a réciprocité sont dites *conjuguées* par rapport au complexe.

III. *Toute droite du complexe est sa propre conjuguée et réciproquement si une droite coïncide avec sa conjuguée, elle appartient au complexe linéaire.*

IV. *Si une droite rencontre deux droites conjuguées, elle fait partie du complexe et réciproquement toute droite du complexe qui rencontre une droite rencontre aussi sa conjuguée.*

On appelle *direction principale* la direction du pôle I du plan de l'infini. Les plans polaires des points à l'infini passent par I, c'est-à-dire sont parallèles à la direction principale ; on les nomme *plans diamétraux* du complexe.

Les plans parallèles à un plan donné pouvant être considérés comme passant par une droite D′ du plan de l'infini, le lieu de leurs pôles est une droite D conjuguée de D′. Le plan de l'infini passant par D′, D sera parallèle à la direction principale. On appelle D un *diamètre* du complexe. Parmi les diamètres, celui qui est le lieu des pôles des plans normaux à la direction principale joue un rôle fondamental ; on le désigne sous le nom d'*axe central* du complexe.

Tout point de l'axe central D_0 a pour plan polaire le plan normal à cet axe. Il en résulte que toute droite qui rencontre normalement l'axe central fait partie du complexe. En appliquant ensuite la réciproque de la propriété (IV), on voit que D et D′, désignant deux droites conjuguées, tout plan normal à l'axe

Hosted by Google

central D_0 le coupe ainsi que D et D′ en 3 points en ligne droite. En d'autres termes, la quadrique réglée passant par D_0, D, D′ est une paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur normal à l'axe central. En conséquence, D_0, D, D′ sont parallèles à un même plan d'où on tire que : *La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées rencontre l'axe central normalement.* Le fait que D_0, D, D′ sont parallèles à un même plan peut encore s'établir ainsi :

Considérons le plan P mené par D parallèlement à D′, son pôle est le point où il rencontre D′ ; ce pôle est donc à l'infini ; dès lors, P est un plan diamétral et, par suite, est parallèle à D_0.

Cherchons les équations de l'axe central ; auparavant, déterminons la direction principale. L'équation du pôle du plan (u', v', w', h') est

$$\Sigma A (uh' - u'h) + \Sigma L (wv' - vw') = 0$$

Pour $u' = v' = w' = 0$, cette équation devient :

$$h' (Au + Bv + Cw) = 0$$

Le pôle du plan de l'infini a donc pour équation :

$$Au + Bv + Cw = 0$$

et la direction principale a pour coefficients directeurs A, B, C,

D'autre part, la normale au plan polaire du point (x, y, z) a pour coefficients directeurs :

$$L + Bz - Cy, \quad M + Cx - Az, \quad N + Ay - Bx$$

Les équations de l'axe central sont donc :

$$\frac{L + Bz - Cy}{A} = \frac{M + Cx - Az}{B} = \frac{N + Ay - Bx}{C} \qquad (7)$$

Si on choisit l'axe central pour axe des z, les équations précédentes doivent se réduire à $x = y = 0$.

Ce qui exige $A = B = L = M = 0$ et l'équation du complexe prend la forme réduite :

$$Cv + N\gamma = 0$$

Hosted by Google

4. **Rôle du complexe linéaire en Cinématique.** — Le théorème suivant montre comment le complexe linéaire se rattache à la cinématique.

Dans un solide en mouvement, les droites qui sont à un instant donné normales aux trajectoires de tous leurs points forment un complexe linéaire. En effet, soit Δ une droite du solide de coordonnées $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$. Si elle est normale à la vitesse d'un de ses points M (x, y, z), on a :

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = 0$$

Or, les projections de la vitesse d'un point du solide sont de la forme :

$$(8) \qquad \begin{cases} v_x = a + qz - ry \\ v_y = b + rx - pz \\ v_z = c + py - qx \end{cases}$$

La condition précédente s'écrit alors :

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + p\,(\gamma y - \beta z) + q\,(\alpha z - \gamma x) + r\,(\beta x - \alpha y) = 0$$

ou encore :

$$(9) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma + p\lambda + q\mu + r\nu = 0$$

équation d'un complexe linéaire.

Le plan polaire d'un point dans ce complexe est le plan normal à la vitesse du point considéré. L'axe central a pour équations d'après

$$(7) \qquad \frac{a + qz - ry}{a} = \frac{b + rx - pz}{b} = \frac{c + py - qx}{c}$$

C'est donc l'axe du mouvement hélicoïdal instantané. Le complexe est spécial si on a :

$$ap + bq + cr = 0$$

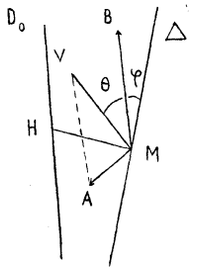
c'est-à-dire si le mouvement instantané se réduit à une rotation.

Puisque dans les formules (8) a, b, c, p, q, r ne sont assujetties à aucune relation, on voit que : *Réciproquement tout complexe*

Hosted by Google

linéaire peut être regardé comme formé par les droites qui, dans un solide en mouvement, sont, à un instant donné, normales aux vitesses de tous leurs points.

Cette interprétation cinématique du complexe linéaire, en facilite souvent l'étude. Comme application, indiquons une relation très simple à laquelle satisfont les droites Δ d'un complexe linéaire (Δ). Soient d la longueur de la perpendiculaire commune MH à Δ et à l'axe central D_0, φ l'angle aigu de Δ avec D_0. Les deux droites MH et Δ appartenant au complexe, le point M est le pôle du plan HM Δ et, par suite, la normale en M à ce plan est la vitesse MV du point M. Si on désigne par θ l'angle de cette vitesse avec l'axe central, par ω et g la rotation et la translation portées par cet axe. On a :



$$tg\,\theta = \frac{\omega d}{g}$$

et

$$d = k\,tg\,\theta$$

en posant

$$k = \frac{g}{\omega}$$

et comme φ et θ sont complémentaires.

$$d\,tg\,\varphi = k \tag{10}$$

On peut considérer la relation (10) comme une sorte d'équation intrinsèque du complexe (Δ). Celui-ci sera complètement défini si on donne son axe central D_0, son paramètre k et en outre son sens. Voici ce qu'il faut entendre par sens d'un complexe linéaire : Imaginons un observateur couché suivant D_0; si un mobile décrivant la droite Δ de manière à monter par rapport à l'observateur se déplace de la gauche vers la droite, il en est de même si on place l'observateur sur D_0 dans l'autre sens.

On dit alors que Δ a le sens *dextrorsum* par rapport à D_0. Si le mobile décrivant Δ de manière à monter se déplace de droite à

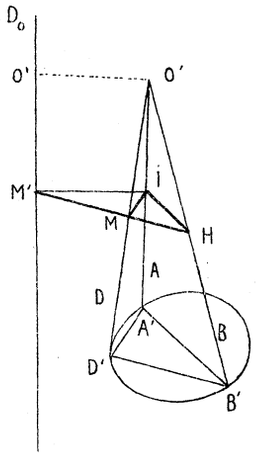
Hosted by Google

gauche, on dira que Δ a le sens *sinistrorsum*. Cela posé, il est visible que toutes les droites d'un complexe linéaire ont même sens par rapport à l'axe central. Par exemple, si les vecteurs rotation et translation ont le même sens, la droite D, qui porte la vitesse MV a le sens *dextrorsum*, et Δ le sens *sinistrorsum* par rapport à D_0 ; on dit, dans ce cas, que le complexe est *sinistrorsum*.

Si la rotation et la translation sont de sens contraires, le complexe sera *dextrorsum*. Observons que si on soumet un complexe linéaire à une symétrie par rapport à un plan normal à l'axe central, on obtient un nouveau complexe linéaire ayant même axe central et même paramètre que le premier, mais de sens contraire.

On peut donner le sens d'un complexe linéaire en affectant d'un signe le paramètre k; on conviendra, par exemple, que si k est positif, le complexe est *dextrorsum*.

5. **Complexe des droites rectangulaires avec leurs conjuguées.** — On a vu que les droites D rectangulaires avec leurs conjuguées par rapport au complexe linéaire (Δ), sont les droites portant les vitesses de tous les points de l'espace. D'après ce qui précède, elles vérifient la condition $d = k\ tg\,\theta$. Elles forment par suite un complexe (D) qui est comme un complexe linéaire susceptible de deux sens différents. Ce que nous avons dit plus haut montre que les complexes (Δ) et (D) sont de sens contraires.



Cherchons le lieu des droites D passant par un point quelconque O de l'espace. Soit M M′ la plus courte distance d'une droite D passant par O et de l'axe central D_0. Par le point O, menons le parallèle OA à l'axe central ; elle perce en I le plan normal en M′ à D_0.

Soit H le point où M′M perce le point mené par OA perpendiculairement au plan OD_0; nous allons voir que la

droite OH est fixe. En effet, soit θ, θ' les angles de OM et OH avec l'axe central. On a :

$$\begin{cases} IM = IO\, tg\theta \\ MM' = k\, tg\theta \\ IH = IO\, tg\theta' \end{cases}$$

et les triangles rectangles semblables IMH, IMM′ donnent :

$$\frac{IH}{IM} = \frac{IM'}{MM'}$$

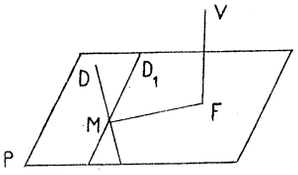
D'où on tire :

$$OO' = IM' = k\, tg\theta'$$

Cette égalité montre que OH est la droite OB qui porte la vitesse du point O et la droite D est à l'intersection de deux plans rectangulaires passant par deux droites fixes OA et OB. On sait que l'intersection de ces deux plans décrit un cône du second degré. Rappelons-en la démonstration élémentaire. Coupons OA, OB, D par un plan fixe normal à OA et soit A′, B′, D′ les points obtenus. La droite B′D′, intersection des deux plans B′D′A′, B′D′O tous deux perpendiculaires au plan A′D′O est normale à ce dernier plan et en particulier à D′A′. L'angle A′D′B′ est donc droit et D′ décrit dans le plan sécant la circonférence de diamètre A′B′. Ainsi :

Le cône du complexe (D) *est un cône du second degré admettant pour plans cycliques les plans normaux à l'axe central.*

La deuxième direction de plans cycliques est celle des plans perpendiculaires à la droite OB qui porte la vitesse du point O.



Proposons-nous maintenant de trouver l'enveloppe des droites D contenues dans un plan donné P. Soit F le pôle du plan P ; la droite qui porte la vitesse FV du point F est normale à P ; sa conjuguée D_1 est une droite

du complexe (D). Une droite quelconque D, située dans le plan P porte la vitesse d'un certain point M de cette droite; le plan polaire de M est normal à D et par suite à P; il passe, en outre, par le pôle F de P; donc, il passe par FV et il résulte que le point M est sur D. Comme, d'autre part, FMD est un angle droit, nous obtenons ce résultat :

La courbe du complexe, située dans un plan P, *est la parabole ayant pour foyer le pôle du plan et pour directrice la caractéristique de ce plan.*

Hosted by Google

Hosted by Google

NOTE IV

THÉORÈME DE SCHÖNEMANN ET MANNHEIM.

1. Quand un solide est assujetti à quatre conditions, son mouvement dépend de deux paramètres t et t' et chaque point M du solide décrit une surface Σ. De même que les normales aux trajectoires des points d'une figure plane, les normales aux surfaces trajectoires des points du solide, relatives à une position donnée de ce solide, obéissent à une loi simple trouvée par Schönemann en 1855, retrouvée en 1866 par M. Mannheim.

Désignons par Δ la normale en M à la surface Σ décrite par ce point et soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ les coordonnées de cette droite. Imprimons au solide le mouvement à un paramètre dans lequel t seul varie; M décrit alors une courbe tracée sur Σ et par suite normale en M à Δ. A ce mouvement correspond un complexe linéaire défini par les constantes a, b, c, p, q, r et formé par les droites normales aux trajectoires de tous leurs points; Δ fait partie de ce complexe et on a :

$$(1) \qquad f = a\alpha + b\beta + c\gamma + p\lambda + q\mu + r\nu = 0$$

De même en considérant le mouvement où t' seul varie, on voit que Δ appartient à un deuxième complexe $(a'b'c'p'q'r')$ et on a :

$$(2) \qquad f' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + p'\lambda + q'\mu + r'\nu = 0$$

m étant quelconque, les coordonnés de Δ vérifieront :

$$(3) \qquad f + mf' = A\alpha + B\beta + C\gamma + P\lambda + Q\mu + R\nu = 0.$$

Hosted by Google

en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} A = a + ma', & P = p + mp' \\ B = b + mb', & Q = q + mq' \\ C = c + mc', & R = r + mr' \end{cases}$$

Les normales Δ appartiennent donc à une infinité de complexes linéaires d'équation $f + mf' = 0$. Cherchons parmi ces complexes ceux qui sont spéciaux; m devra vérifier

$$(5)\qquad AP + BQ + CR = 0$$

C'est là une équation du second degré en m; à ses deux racines m_1 et m_2 correspondent par les formules (4) les coordonnées de deux droites D_1 et D_2.

Toutes les normales Δ rencontrent $D_1 D_2$.

Ainsi : *Pour une position déterminée du solide, les normales aux surfaces trajectoires de tous ces points rencontrent deux droites.*

C'est dans cette propriété que consiste le théorème de Schönemann et Mannheim. D'ailleurs les droites D_1, D_2 ne sont pas nécessairement réelles; si l'équation (5) a ses racines imaginaires, D_1 et D_2 sont des droites imaginaires conjuguées.

Supposons par exemple que l'on connaisse les surfaces trajectoires $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, de 4 points $M_1 M_2 M_3 M_4$ du solide et qu'on veuille obtenir la normale à la surface décrite par un point quelconque M; on mènera les normales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ aux surfaces $\Sigma_1 \Sigma_2 \ldots$, etc; on sait qu'il y a deux droites et, deux seulement, rencontrant $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$; on les construira et on aura ainsi D_1 et D_2; il ne reste plus qu'à mener la droite passant par M et s'appuyant sur D_1 et D_2. On est donc ramené à une construction du second degré suivie d'une construction du premier.

2. Voici une conséquence importante du théorème précédent. Soit une droite quelconque D liée au solide; les normales aux surfaces trajectoires des points de D rencontrent les trois droites D, D_1, D_2.

Donc : *Dans le mouvement à deux paramètres d'un solide, les normales aux surfaces trajectoires des points d'une droite forment des génératrices de même système d'une quadrique réglée* (Q).

Hosted by Google

Indiquons une applications de cette propriété. Supposons que trois points a,b,c de la droite D liée au solide décrivent des sphères dont les centres $a'b'c'$ soient en ligne droite. La quadrique (Q) est déterminée par les normales aa', bb', cc' aux sphères trajectoires des points a,b,c. Les droites abc et $a'b'c'$ sont des génératrices du deuxième système; par suite la normale à la surface décrite par un point quelconque d de la droite abc, rencontre $a'b'c'$ en un certain point d'. D'autre part on sait que les génératrices de même système d'une quadrique rencontrent quatre génératrices fixes de l'autre système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant; on a donc :

$$(a',b',c',d') = (a,b,c,d)$$

et par suite le point d' est fixe. La normale à la surface trajectoire de d passe constamment par le point fixe d'; il en résulte que d décrit une sphère de centre d'. Nous avons donc ce théorème :

Si trois points d'une droite décrivent des sphères ayant leurs centres en ligne droite, un point quelconque de la droite décrit aussi une sphère ayant son centre sur la droite qui passe par les premiers.

En particulier si on prend sur D le point d tel que

$$(a,b,c,d) = (a',b',c'\ \infty)$$

on voit qu'il y a un point de D qui décrit un plan normal à la ligne des centres $a'b'c'$.

Hosted by Google

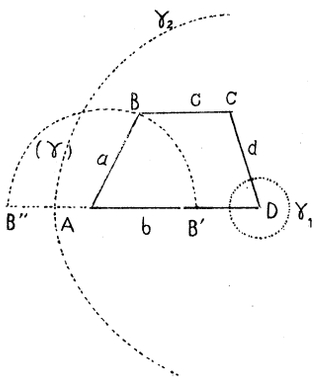
Hosted by Google

NOTE V

SUR LES SYSTÈMES ARTICULÉS.

1. On appelle système articulé plan un ensemble déformable de tiges rigides situées dans un même plan et reliées entre elles par des pivots normaux au plan. On considère souvent non seulement le mouvement des points d'une tige, mais encore celui des points du plan invariablement lié à cette tige ; il conviendra alors de remplacer la tige par une plaque.

2. **Quadrilatère articulé.** — Nous étudierons surtout le système articulé le plus simple qui est le quadrilatère articulé.



Soit ABCD un quadrilatère articulé ; sa configuration ne dépend que d'un paramètre, par exemple la valeur de l'angle BAD.

Nous dirons qu'un pivot est à *révolution complète* si l'angle des deux tiges issues de ce pivot peut prendre toutes les valeurs de 0 à 2π.

Cherchons à quelles conditions un pivot A sera à révolution complète. Désignons par a et b les longueurs des tiges articulées en A ; nous pouvons toujours supposer $a < b$; soit c et d les longueurs des deux autres tiges, c étant la plus petite. Si on déforme le quadrilatère en laissant fixe la tige AD par exemple, e point B reste sur la circonférence (γ) de centre A de et rayon a.

Hosted by Google

En outre, comme $d - c < \mathrm{BD} < d + c$, ce point B est intérieur à la couronne comprise entre les deux circonférences γ_1 γ_2 de centre D et de rayons respectifs $d - c$, $d + c$. Pour que A soit à révolution complète, il faut que le cercle γ soit intérieur à cette couronne, ce qui exige

$$\mathrm{AB}' = b - a > d - c$$
$$\mathrm{AB}'' = b + a < d + c$$

Nous laissons de côté les cas particuliers où les inégalités se transformeraient en égalités. Les conditions précédentes peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} a + d < b + c & (1) \\ a + b < d + c & (2) \end{cases}$$

On en tire en ajoutant $a < c$ et comme on a

$$a < b, \quad c < d$$

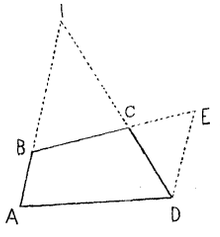
a est le plus petit côté.

Si b est le plus grand côté, l'égalité (2) montre que la somme du plus grand et du plus petit côté est inférieure à celle des côtés moyens. Si c'est d qui est le plus grand la même propriété a lieu en vertu de l'inégalité (1). Ainsi :

Si un pivot est à révolution complète, il appartient au plus petit côté et la somme du plus grand et du plus petit côté est inférieure à celle des côtés moyens.

Réciproquement, on voit sans peine que : *Si la somme du plus grand et du plus petit côté est inférieure à celle des côtés moyens les deux extrémites du petit côté sont des pivots à révolution complète.*

Indiquons quelques applications du quadrilatère articulé. Supposons qu'on fixe la tige AD, ou ce qui revient au même qu'on fixe les deux points A et D en supprimant la tige AD devenue inutile ; on obtient alors un système de trois tiges, que les Anglais appellent un *trois barres* et dont l'emploi est fréquent dans les machines ; AB et CD reçoivent le nom



bielles, BC celui de *manivelle*. Quand la bielle AB tourne autour de A, son mouvement est transmis par la manivelle à la bielle CD et on transforme ainsi un mouvement de rotation en un autre. D'ailleurs si la première rotation est uniforme, la seconde ne l'est pas en général; en effet, soit I le centre instantané relatif au mouvement de BC; il est à la rencontre de AB, et CD si ω et ω' sont les vitesses angulaires de AB et DC, on a, en exprimant de deux façons le rapport des vitesses des points B et C.

$$\frac{\omega.\ AB}{\omega'.\ CD} = \frac{IB}{IC} = \frac{DE}{CD}$$

DE étant parallèle à AB.

DE étant variable, il en est de même du rapport $\frac{\omega}{\omega'}$.

Si les pivots A et D sont à révolution complète, l'appareil permet de transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire continu; si un seul des pivots est à révolution complète, il transformera un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire alternatif et *vice versa*; enfin, si aucun des pivots A et D n'est à révolution complète, l'appareil ne pourra que transformer un circulaire alternatif en un circulaire alternatif. Observons que cette dernière transformation est possible dans tous les cas; il suffit de ne faire décrire à une bielle qu'une partie de l'angle qu'elle peut parcourir.

3. **Quadrilatères particuliers.** — Mentionnons deux quadrilatères particuliers intéressants : le parallélogramme et le contre-parallélogramme.

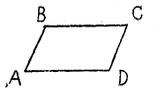
Dans le *parallélogramme* articulé, tous les pivots sont à révolution complète; dans ce cas, et seulement dans ce cas, les deux bielles ont même vitesse angulaire; tout point lié à la manivelle décrit une circonférence égale à celle que décrit le point B.

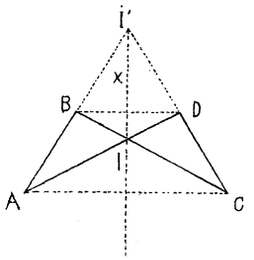
Le contre-parallélogramme est un quadrilatère biconcave, ayant, comme le parallélogramme, ses côtés opposés égaux.

On voit facilement que BD et AC sont constamment parallèles

Hosted by Google

et que la figure admet un axe de symétrie IX, passant par le point commun I à BC et AD et le point commun I′ aux deux autres côtés AB et CD.





Fixons AB et déformons le quadrilatère. Le centre instantané relatif au mouvement de la manivelle CD est le point I. Comme on a :

$$IB + IA = ID + IC = AD$$

on voit que le point I décrit dans le plan fixe une ellipse (E) de foyers A et B et dont le grand axe a pour longueur AD et dans le plan mobile une ellipse (E′) de foyers C et D et de grand axe AD. Ces deux ellipses sont constamment symétriques par rapport à leur tangente commune IX.

Nous sommes dans le cas où les roulantes sont symétriques; par suite, tout point lié à DC décrira une podaire d'ellipse.

Si au lieu de AB on fixe un des côtés AD, BC, qui se coupent le centre instantané est en I′, les roulantes sont des Hyperboles et tout point lié à la manivelle décrit une podaire d'Hyperbole.

4. **Systèmes articulés employés comme transformateurs.** — Si on fixe une tige d'un système articulé dont la forme dépend de deux paramètres ou un point d'une tige d'un système à un paramètre, il y aura une infinité de points liés aux tiges et dont la position dépendra de deux paramètres. Soient M et M′ deux de ces points; M peut prendre une position arbitraire dans le plan, ou plus exactement à cause des dimensions finies de l'appareil, une position arbitraire à l'intérieur d'une portion du plan. La position de M entraînera celle de M′ et inversement.

Le système permet donc de définir une correspondance ponctuelle univoque dans le plan; cette correspondance est d'ailleurs de nature algébrique. Il y a lieu de se demander si les transformations ponctuelles algébriques ainsi obtenues à l'aide de systèmes articulés ne sont pas particulières parmi toutes les transformations algébriques.

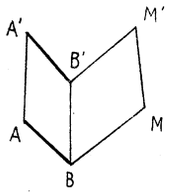
Il n'en est rien. On a montré, en effet, que : *Toute transfor-*

Hosted by Google

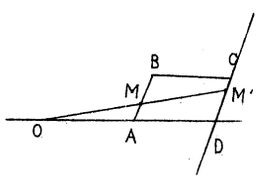
mation ponctuelle algébrique peut être réalisée au moyen d'un système articulé.

Nous nous bornerons à faire voir comment on peut, à l'aide de systèmes articulés, réaliser les transformations simples de la géométrie élémentaire à savoir : la translation, l'homothétie, la rotation, l'inversion et la symétrie par rapport à une droite.

Translation. L'appareil propre à réaliser la translation (translateurs de Kempe) est formé de deux parallélogrammes articulés AA'BB, BB'M'M ayant une tige commune BB'. Si on fixe AA', la la position de M dépend de deux paramètres. Comme on a constamment MM' égal et parallèle à AA', on voit que le point M' est le tranformé de M dans la translation définie par le segment AA'.



Homothétie. Soit un parallélogramme articulé ABCD dont les côtés AD et CD sont prolongés. Choisissons sur AD un point O et sur AB et CD deux points M et M' tels que



$$\frac{DM'}{AM} = \frac{OD}{OA} = k$$

Les points O, M, M' seront constamment en ligne droite et on aura :

$$\frac{OM'}{OM} = k$$

Si on fixe le point O, M dépendra de deux paramètres et M' sera son transformé dans une homothétie de centre O et de rapport k. En choisissant convenablement le point O, on pourra obtenir n'importe quel rapport d'homothétie ; pour un rapport négatif, il faudra prendre O entre A et D.

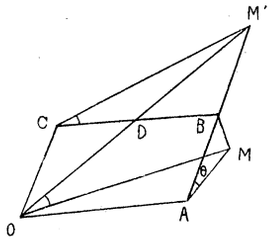
Cet appareil, utilisé dans le dessin pour réduire une figure dans un rapport donné, est le *pantographe du P. Scheiner.*

Rotation. Sylvester a indiqué un pantographe réalisant en même temps que l'homothétie une rotation d'angle donné.

Reprenons un parallélogramme articulé OABC ; soit une plaque rigide triangulaire ABM liée à la tige AB et une deuxième plaque CBM' liée à CB. Les triangles ABM, CBM' sont construits de

Hosted by Google

manière à être semblables, les angles BAM et BMA étant respectivement égaux aux angles BCM′ et CBM′, on a :



$$\frac{CM'}{BA} = \frac{CB}{AM}$$

ou

$$\frac{CM'}{CO} = \frac{AO}{AM}$$

et comme les angles OCM′ et OAM sont égaux, les deux triangles OCM′ et OAM sont semblables. Il en résulte :

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{CO}{AM} = \frac{AB}{AM} = k$$

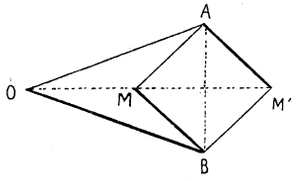
En outre, l'angle M′OM est la différence entre M′OA ou M′DB et MOA ou CM′D; il est donc égal à M′CD et par suite constant.

Si on fixe le point O, M dépendra de deux paramètres et M′ sera son transformé dans une homothétie-rotation de centre O définie par le rapport k et l'angle θ = BAM. On aura la simple rotation si :

$$k = 1$$

c'est-à-dire si le triangle BAM est isocèle de sommet A.

Inversion. En 1864, *Peaucellier* fit connaître le premier inverseur. L'inverseur de Peaucellier consiste en deux tiges égales OA, OB articulées entre celles au point O et réunies en A et B aux sommets d'un losange articulé AMBM′.



La perpendiculaire, au milieu de AB, passe par O,M,M′ ; donc ces trois points seront toujours en ligne droite.

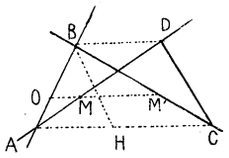
Le produit OM × OM′ est la puissance du point O par rapport au cercle de centre A et de rayon AM. On a donc :

$$OM \times OM' = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 = \text{const.}$$

Hosted by Google

Si donc on fixe le point O, M dépendra de deux paramètres et M′ sera son transformé dans une inversion de pôle O et de puissance $\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2$

Hart a montré que le contre-parallélogramme peut être utilisé comme inverseur. Soit ABCD un contre-parallélogramme dont les tiges sont prolongées. Sur AB, AD, BC, prenons 3 points O,M,M′ tels que :



$$\frac{OA}{OB} = \frac{MA}{MD} = \frac{M'C}{M'B}$$

Ces 3 points resteront constamment en ligne droite. Evaluons le produit OM × OM′. Les triangles semblables donnent :

$$OM = BD.\frac{OA}{AB} \qquad OM' = AC.\frac{OB}{AB}$$

d'où

$$OM.\ OM' = BD \times AC.\ \frac{OA \times OB}{\overline{AB}^2}$$

Menons BH parallèle à DC, on aura :

$$BH = BA, \quad CH = BD$$

et

$$BD \times AC = CH \times CA$$

Ce dernier produit est la puissance du point C par rapport au cercle de centre B et de rayon BA ; il a donc pour valeur

$$\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$$

et

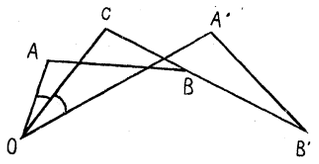
$$OM \times OM' = (\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)\ \frac{OA \times OB}{\overline{AB}^2} = \text{const.}$$

Par suite, si on fixe le point O, M dépend de deux paramètres et M′ est son transformé dans une inversion de pôle O.

Hosted by Google

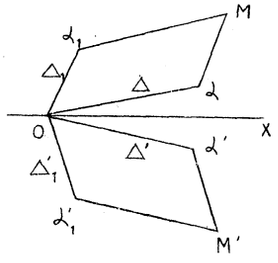
Avec le même contre-parallélogramme, par un choix convenable du point O, on pourra réaliser une inversion de puissance quelconque; remarquons qu'il n'en est plus de même pour l'inverseur de Peaucellier; celui-ci ne donne qu'une inversion de puissance déterminée.

Symétrie. Indiquons d'abord un système articulé (réverseur de Kempe) qui permet d'obtenir trois tiges issues d'un même point, de telle façon que deux d'entre elles restent constamment symétriques par rapport à la troisième.



Considérons un système de deux contre-parallélogrammes OABC, OA'B'C ayant une tige commune OC, la tige CB' du second étant le prolongement de la tige CB du premier. Si on a pris $\frac{CB'}{CO} = \frac{AB}{AO}$ les deux quadrilatères sont semblables et, par suite, l'angle AOC égale constamment l'angle A' OC. Ce système à un paramètre réalise donc la symétrie de deux tiges OA, OA' par rapport à OC.

Cela posé sur un axe fixe X, prenons un point O; en appliquant suivant OX, la tige d'un premier réverseur, nous aurons un système de deux droites $\Delta\Delta'$ issus de O constamment symétriques par rapport à OX; un deuxième réverseur nous fournira deux droites $\Delta_1\Delta'_1$ indépendantes des premières et symétriques par rapport à OX.

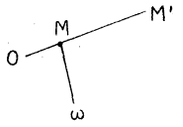


Sur $\Delta\Delta_1$ construisons un parallélogramme articulé $O\alpha M\alpha_1$, et sur $\Delta'\Delta'_1$ un deuxième parallélogramme $O\alpha' M'\alpha'_1$, ayant mêmes côtés que le premier. Les points M et M' seront constamment symétriques par rapport à X.

Ils dépendent d'ailleurs de 2 paramètres et nous avons bien là un appareil réalisant la symétrie par rapport à X.

Hosted by Google

5. Transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.



A l'aide d'un inverseur, il est possible de transformer en un mouvement rectiligne un mouvement circulaire ; on assujettira par exemple le point M à rester sur une circonférence passant par le pôle d'inversion O ; il suffit pour cela de relier le point M par une tige à un pivot fixe ω tel que

$$\omega M = \omega O$$

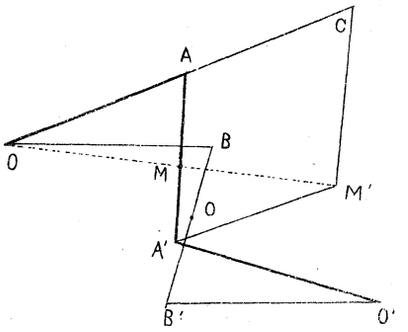
Le point M′, inverse de M, décrira alors une droite ou plus exactement un segment de droite. Remarquons que le pivot ω sera nécessairement à révolution limitée, car si M pouvait décrire toute sa circonférence, M′ décrirait une droite indéfinie.

La réalisation du mouvement rectiligne n'est qu'un cas particulier de ce théorème général dû à Kempe : *Tout arc de courbe algébrique peut être décrit au moyen d'un système articulé.*

Cependant jusqu'en 1864, époque à laquelle Peaucellier fit connaître son inverseur, on doutait même que le guidage exact du mouvement rectiligne fut possible.

On ne connaissait qu'une solution approchée du problème, due à *Watt*.

Le système indiqué par Watt (*parallélogramme articulé*) consiste essentiellement en un trois barres OAA′O′ tel que les deux bielles puissent en même temps prendre les positions horizontales OB et OB′.



La bielle supérieure OA est le *balancier*, O′A′ le *contre balancier*. Considérons la courbe décrite par le milieu M de la manivelle AA′. Son équation s'obtiendrait aisément comme il

suit; soit $2l$ la longueur AA′, (x,y) les coordonnées de M, θ l'angle de A′A avec l'axe des x; les coordonnées des points A,A′ sont respectivement :

$$(x + l\cos\theta, \quad y + l\sin\theta)$$

et

$$(x - l\cos\theta, \quad y - l\sin\theta);$$

en les portant dans les équations des deux cercles décrits par A et A′ on obtient deux équations linéaires en $\sin\theta$ et en $\cos\theta$; en éliminant θ on trouve une équation du sixième degré. On vérifie sans peine sur l'équation que le point O milieu de la manivelle quand celle-ci est en BB′ est un point d'inflexion à tangente verticale. Ce dernier résultat peut se voir directement; en effet, le centre instantané I relatif au mouvement de AA′ est rejeté à l'infini dans la direction horizontale quand AA′ vient en BB′; donc la tangente en O est verticale; en second lieu à toute position du trois barres correspond une deuxième position symétrique de la première par rapport à O; O est donc un centre de la courbe et par suite un point d'inflexion.

La courbe rencontre sa tangente en O en deux M_1, M_2 qui on le voit aisément correspondent aux deux positions pour lesquelles A vient sur la verticale du point B′. On conçoit dès lors que l'arc qui s'étend entre M_1 et M_2 doit être très voisin de la tangente verticale. Il est facile de calculer une limite supérieure de l'écart maximum du point M avec cette verticale (Voir : *Leçons de Cinématique, Kœnigs*, p. 277).

On trouve, par exemple, que si les deux bielles ont pour longueur commune 1^m85, la manivelle 1^m20 et la distance horizontale des deux pivots OO′ 3^m60 environ, l'écart maximum est de l'ordre du millimètre.

Si on tient compte que le jeu qui se produit aux pivots d'un système articulé doit entraîner des variations de cet ordre, on voit qu'au point de vue pratique le système de Watt, qui exige seulement trois barres, est préférable aux inverseurs.

On adjoint toujours aux *trois barres* un parallélogramme articulé A′ACM′ dont le côté AC prolonge OA et lui est égal; le point M′, qui est homothétique de M dans le rapport 2, aura aussi un mouvement sensiblement rectiligne.

Hosted by Google

6. **Résultats généraux relatifs aux systèmes articulés.** — Nous venons d'étudier quelques systèmes articulés plans.

On peut aussi considérer des systèmes articulés dans l'espace ou *systèmes gauches*. Deux tiges consécutives sont alors reliées de manière que l'une d'elles puisse prendre, par rapport à l'autre, toutes les orientations ; on a imaginé de nombreux dispositifs ou *joints* (joint de Cardan, joint Goubet, joint Clémens) permettant d'obtenir ce mode de liaison.

Relativement à ces systèmes articulés, d'importants résultats généraux ont été établis par M. Kœnigs (*Comptes-rendus* avril 1895. *Leçons de Cinématique*, p. 298). Nous ne faisons que les énoncer :

Toute relation de nature algébrique entre un ou plusieurs points de l'espace peut être obtenue au moyen de systèmes articulés.

Si on considère un seul point, on voit que toute portion de surface algébrique peut être décrite à l'aide d'un système articulé; en associant deux systèmes articulés relatifs à deux surfaces algébriques, on voit que tout arc de courbe gauche algébrique peut être décrit au moyen d'un système articulé.

Une autre conséquence du théorème général qui précède est que toutes les transformations ponctuelles algébriques de l'espace peuvent être réalisées par l'emploi des systèmes articulés ; il en est ainsi notamment pour l'homographie et l'inversion.

Enfin, le mouvement algébrique d'un solide peut être guidé au moyen d'un système articulé ; il suffit d'associer les systèmes qui font décrire à trois points du corps leurs trajectoires algébriques.

FIN.

Hosted by Google

Hosted by Google

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

CINÉMATIQUE

Numéros.		Pages.
	INTRODUCTION	VII

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES VECTEURS.

1-2	Vecteur. — Mesure algébrique d'un vecteur	1
3	Somme géométrique de plusieurs vecteurs	2
4	Projection d'un vecteur sur une droite	2
5	Théorème des projections	2
6	Détermination analytique de la résultante	3
7	Longueur de la résultante	3
8	Moments. — Sens direct	4
9	Moment d'un vecteur par rapport à un point	4
10-11	Détermination analytique du moment d'un vecteur	5
12	Théorème de Varignon généralisé	6
13-14	Moment par rapport à une droite	7
15	Moment par rapport à un axe	8
16	Expression analytique du moment par rapport à un axe	9
17	Moment d'un vecteur par rapport à un autre vecteur	10

LIVRE PREMIER

DU MOUVEMENT SIMPLE D'UN POINT.

CHAPITRE PREMIER

DE LA VITESSE.

1-2	Trajectoire. — Mouvement rectiligne uniforme	11
3	Mouvement rectiligne varié	11

*

Hosted by Google

Numéros. Pages.
4 Mouvement curviligne. 12
5 Projection du mouvement sur un axe. 12
6 Projection du mouvement sur un plan. 13
7 Détermination analytique de la vitesse. 13

CHAPITRE II

PROJECTIONS ORTHOGONALES DE LA VITESSE.

1 Coordonnées polaires planes 15
2 Vitesse aréolaire. 16
3 Application au mouvement des planètes. 17
4 Coordonnées semi-polaires ou cylindriques 17
5 Coordonnées polaires ou sphériques. 18
6 Coordonnées curvilignes. 19

CHAPITRE III

COMPOSITION DES VITESSES. — CONSTRUCTION DES TANGENTES.

Composition des vitesses. 22-24
1-4 Construction des tangentes. 23
5 Tangente à la Conchoïde. 24
6 Tangentes aux courbes en coordonnées multi-polaires. 25

LIVRE II

MOUVEMENT SIMPLE D'UN POINT. — DE L'ACCÉLÉRATION.

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITION DE L'ACCÉLÉRATION.

1 Mouvement rectiligne uniformément varié. 27
2 Mouvement rectiligne quelconque. 27
3-4 Mouvement curviligne. — Hodographe. 28-29
5 Autre définition de l'accélération. 29
6 Projections de l'accélération. 30
7 Accélération d'ordre supérieur. 30

CHAPITRE II

PROJECTIONS DE L'ACCÉLÉRATION.

1 Projections sur la tangente et sur la normale. 32
2 Application au mouvement circulaire. 33

Hosted by Google

Numéros Pages.
3 Rayon de courbure de l'hélice. 34
4 Projections en coordonnées polaires planes. 34
5 Coordonnées semi-polaires. 35
6 Coordonnées polaires dans l'espace. 35
7 Coordonnées curvilignes. 36
8 Projections de la suraccélération. 36

CHAPITRE III

ACCÉLÉRATIONS CENTRALES.

1-2 Diverses expressions de la vitesse. 39
3 Expressions diverses de l'accélération 40
4 Application au mouvement d'un point sur une conique, l'accélération étant constamment dirigée vers un foyer. 42
5. Mouvement d'un point sur une spirale logarithmique, l'accélération étant constamment dirigée vers le pôle. 43

LIVRE III

ÉTUDE GÉOMÉTRIQEE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

CHAPITRE PREMIER

DES MOUVEMENTS DE TRANSLATION ET DE ROTATION D'UN SOLIDE.

1 Translation 45
2-3 Rotation. — Représentation des rotations. 46
4 Détermination analytique de la vitesse d'un point du corps. . . 47

CHAPITRE II

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

Théorèmes I, II, III, IV 48-50

CHAPITRE III

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

1-4 Etude géométrique du mouvement d'un solide ayant un point fixe — axe instantané de rotation — cônes roulants. 52-53
5-8 Mouvement d'un solide quelconque — axe instantané de rotation et de glissement. 54-57
9 Foyer d'un plan et plan focal d'un point du solide. 58
10-11 Etude des droites du solide normales aux vitesses de leurs points 58-59

Hosted by Google

Numéros. Pages

11-13 Droites conjuguées. 59-60
14 Relation entre les distances de deux droites conjuguées à l'axe instantané et leurs angles avec cet axe. 61
15 Caractéristique d'une surface liée au solide. 62
16 Surfaces virantes. 62

CHAPITRE IV

COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS.

1 Démonstration géométrique du théorème de Coriolis. 65

LIVRE IV

ÉTUDE ANALYTIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE ANALYTIQUE DU MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

1 Centre instantané. 69
2 Accélération d'un point du plan mobile. 71
3 Centre des accélérations. 72
4 Composante normale de l'accélération. 73
5 Composante tangentielle de l'accélération. 73
6 Formule de Savary. 74
7 Centre de courbure d'une enveloppe. 76
8-10 Cercle des rebroussements. 77
10-11 Construction du centre de courbure de la trajectoire d'un point 78
12 Cercle de roulement. 80
13-14 Coordonnées du centre de courbure de la trajectoire d'un point 81
15 Mouvement inverse. 83

CHAPITRE II

APPLICATIONS.

1-6 Mouvement d'une figure plane défini par les deux roulantes. . 84-91
6 Mouvement d'une figure plane dont deux points décrivent des droites. 91-94
7 Mouvement d'une figure dont deux points décrivent deux cercles égaux, la ligne des centres étant égale à la distance des deux points. 94
8 Mouvement d'une figure dont deux droites enveloppent des cercles 96
9 Mouvement d'une figure dont un point décrit une droite et dont une droite enveloppe un cercle. 98

Hosted by Google

CHAPITRE III

ÉTUDE ANALYTIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

Numéros.		Pages.
1	Projection de la vitesse d'un point	101
2	Equations de l'axe hélicoïdal	103
3-4	Accélération d'un point	104
5	Expression des composantes de la rotation à l'aide des angles d'Euler	107
6	Composantes de l'accélération d'un point	108
7	Courbure sphérique des trajectoires	109
8-10	Expression de la constante K	111
11	Démonstration analytique du théorème de Coriolis	116

LIVRE V

COMPOSITION DES MOUVEMENTS D'UN SOLIDE.

1	Définitions	119
2	Composition des translations	119
3	Composition des rotations concourantes	120
4	Composition des rotations quelconques	121
5	Systèmes de rotations équivalents	122
6	Systèmes de rotations particuliers	122
7	Décomposition du mouvement d'un solide en deux rotations	123

DEUXIÈME PARTIE

NOTES

NOTE I. — Formules d'Olinde Rodrigues. — Applications	129
NOTE II. — Le déplacement considéré comme homographie et transformation ponctuelle	141
NOTE III. — Le complexe linéaire. — Application à la cinématique	153
NOTE IV. — Théorème de Schönemann et Mannheim	165
NOTE V. — Sur les systèmes articulés	169

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Périgueux. — Imp. de la Dordogne (Ancienne DUPONT et Cie).

Hosted by Google

Hosted by Google